РАНХиГС
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА
И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Дальневосточный институт управления

филиал РАНХиГС

И. А. Алтухова, М. И. Жидкова

Практикум по математике (часть 1)

Учебное пособие

Рекомендовано Дальневосточным региональным учебно-методическим центром (ДВ РУМЦ) в качестве практикума для студентов экономических направлений подготовки вузов региона

Хабаровск

2024

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 43B0028FD23306BCF414031E3FCDC222
Владелец: Меркулов Евгений Сергеевич
Действителен: с 29.01.2025 до 24.04.2026

УДК 512 (075.8)

ББК 22.1я73

А 527

Рецензенты:

Ледовских И. А. – канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент высшей школы естественных наук, математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Тихоокеанский государственный университет»

Табачук Н. П. – канд. пед. наук, доцент, доцент высшей школы естественных наук, математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Тихоокеанский государственный университет»

Алтухова, И. А.

А 527 **Практикум по математике (часть 1)** : учебное пособие / И. А. Алтухова, М. И. Жидкова. – Хабаровск : Дальневосточный институт управления – филиал РАНХиГС, 2024. – 85 с.

ISBN 978-5-94456-329-3

Учебное пособие предназначено для обучающихся экономических направлений подготовки. В каждой главе рассмотрен теоретический материал, приведены примеры с решениями, подобраны задания для закрепления изученного материала.

УДК 512 (075.8)

ББК 22.1я73

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Дальневосточного института управления – филиала РАНХиГС

ISBN 978-5-94456-329-3

© Алтухова И. А., Жидкова М. И., 2024

© Дальневосточный институт
управления – филиал РАНХиГС, 2024

СОДЕРЖАНИЕ

Введение…… 4
I. Элементы теории множеств……. 5
II. Пределы…… 8
III. Дифференциальное исчисление…… 12
IV. Исследование функций и построение графиков……. 17
V. Интегральное исчисление ……..... 25
VI. Метод наименьших квадратов…….. 32
VII. Дифференциальные уравнения…… 33
VIII. Ряды…….. 39
IX. Элементы линейной алгебры…… 43
Задания для самостоятельной работы …… 51

Введение

В настоящее время для будущего специалиста необходимо умение использовать математические знания в будущей профессии.

Прикладной аспект математики требует знакомства не только с небольшим числом разрозненных концепций и методов, но и формирования понимания связей между всеми изучаемыми понятиями. Для понимания и сознательного использования на практике математических моделей и методов, применяемых в экономике и управлении, и для того, чтобы воспринимать и использовать новые идеи, концепции, компьютерные программные продукты, непрерывно возникающие в этих быстро развивающихся областях, абсолютно необходимы определенный уровень математического образования, знания фундаментальных концепций математики в их взаимосвязи.

Данное учебное пособие ориентировано на обучающихся всех направлений подготовки и специальностей, изучающих математические дисциплины. В начале каждой главы рассмотрены основные понятия, свойства по следующим темам: «Элементы теории множеств», «Пределы», «Дифференциальное исчисление», «Исследование и построение графика функции», «Интегральное исчисление», «Метод наименьших квадратов», «Дифференциальные уравнения», «Ряды», «Элементы линейной алгебры», приведены примеры с решениями, подобраны задания для закрепления теоретического материала.

Пособие полезно для самостоятельной работы обучающихся и для работы на аудиторных занятиях.

I. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Под *множеством* будем понимать совокупность, собрание каких-либо объектов произвольной природы, которые называются *элементами* множества.

Множество считается заданным, если определено какие элементы к нему принадлежат ($a \in \mathrm{M}$, $b \notin \mathrm{M}$).

Операции над множествами:

1. Объединение: $\mathrm{M} \cup \mathrm{N} = \{a | a \in \mathrm{M} \text{ или } a \in \mathrm{N}\}$;
2. Пересечение: $\mathrm{M} \cap \mathrm{N} = \{a | a \in \mathrm{M} \text{ и } a \in \mathrm{N}\}$;
3. Дополнение: $\mathrm{M} = \{a | a \notin \mathrm{M}\}$;
4. Разность: $\mathrm{M} \backslash \mathrm{N} = \{a | a \in \mathrm{M} \text{ и } a \notin \mathrm{N}\}$.

Пример 1.

Найти объединение, пересечение и разность множеств $\mathrm{A} = [0; 7]$ и $B = [3; 10]$.

Решение:

$\mathrm{A} = [0; 7]$, $B = [3; 10]$, тогда $A \cup B = [0; 10]$, $A \cap B = [3; 7]$, $A \backslash B = [0; 3)$.

Пример 2.

Доказать тождество $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$.

Решение:

Докажем два включения

$A \backslash (B \cup C) \subset (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$ и $(A \backslash B) \cap (A \backslash C) \subset A \backslash (B \cup C)$.

Построим цепочку следующих друг из друга утверждений

$x \in A \backslash (B \cup C) \Rightarrow x \in A, x \notin (B \cup C) \Rightarrow x \in A, x \notin B, x \notin C \Rightarrow x \in A \backslash B$,

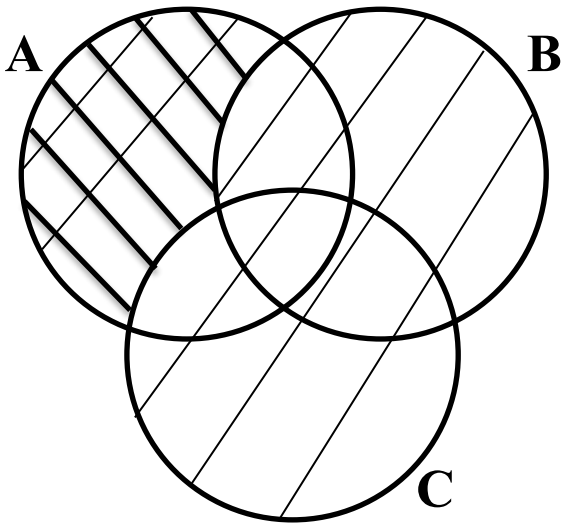
$x \in A \backslash C \Rightarrow x \in (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$.

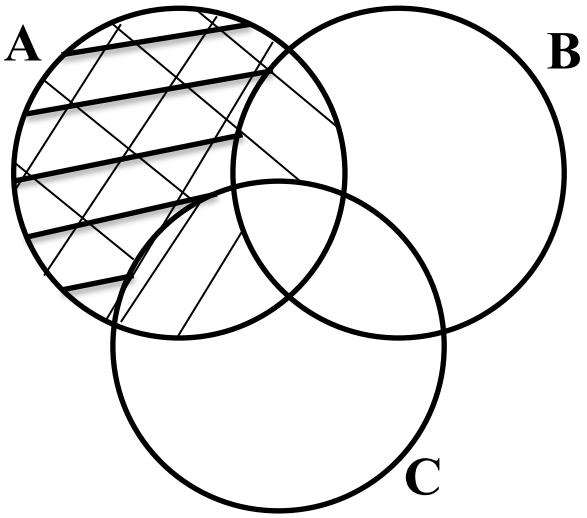
Проверим обратное включение $x \in (A \backslash B) \cap (A \backslash C) \Rightarrow x \in A \backslash B, x \in A \backslash C \Rightarrow$

$x \in A, x \notin B, x \notin C \Rightarrow x \in A, x \notin (B \cup C) \Rightarrow x \in A \backslash (B \cup C)$.

Таким образом, равенство доказано.

Доказательство тождества можно провести с помощью диаграмм Эйлера – Венна.





Пример 3.

Упростите выражение $((A \cup B \cup C) \cap (A \cup B))\backslash((A \cup (B\backslash C)) \cap A)$.

Решение:

1. $(A \cup B \cup C) \cap (A \cup B) = A \cup B,$ так как $(A \cup B) \subset (A \cup B \cup C)$;

2. $\big(A \cup (B\backslash C)\big) \cap A = A$;

3. $(A \cup B)\backslash A = B\backslash A$.

Итак, $((A \cup B \cup C) \cap (A \cup B))\backslash((A \cup (B\backslash C)) \cap A) = B\backslash A$.

Задания:

1. Пусть B – множество простых чисел вида $7n$+2, где $n \in N$. Верна ли запись: $16 \in B$, $21 \in B$, $32 \notin B$, $44 \notin B$.

2. Определить закон, по какому задано множество, содержащее следующие элементы:

$\left\{6; 2; \frac{2}{3}; \frac{2}{9}; \dots\right\}$;

$\left\{\frac{3}{7}; \frac{5}{11}; \frac{7}{15}; \frac{9}{19}; \dots\right\}$;

$\left\{\frac{1}{5}; \frac{3}{8}; \frac{5}{11}; \frac{7}{14}; \frac{9}{17}; \dots\right\}$;

$\left\{\frac{3}{4}; \frac{8}{9}; \frac{15}{16}; \frac{24}{25}; \frac{35}{36}; \dots\right\}$;

$\{2; 6;\ 12;\ 20; 30; \dots\}$;

$\{4; 18;\ 48;\ 100; 180; \dots\}$.

3. Найти элементы множества:

$A = \{x \in R | x^2 - 3x + 2 = 0\}$;

$B = \{x \in R | x^2 + 1 = 0\}$;

$C = \{x \in R | \frac{2x}{x^2+1} < 3\};$

$D = \{x \in R | x^2 - 5x + 4 = 0\};$

$E = \left\{x \in N \middle| 2 < x \leq 8\frac{2}{5}\right\};$

$F = \{x \in Z | |x| < 6\};$

$G = \{x \in Z | -4 < x^3 + 1 < 20\};$

$K = \{x \in R | x^2 - 5x + 4 > 0\}.$

Определить какие из данных множеств конечны, какие нет.

4. Найти пересечение, объединение, разность и дополнение: [3;7) и (4;9].

5. Выяснить, какие высказывания истины, какие ложны.

$\{x \in R | x^2 - 5x + 4 = 0\} \subseteq \{x \in R | x^2 - 5x + 4 \geq 0\};$

$\{x \in R | x - 4 \geq 0\} \subseteq \{x \in R | x^2 - 5x + 4 \geq 0\};$

$\{x \in R | x - 2 \geq 0\} \subseteq \{x \in R | x^2 - 5x + 4 \geq 0\};$

$\{x \in R | x^2 + x + 2 = 0\} \subseteq \emptyset;$

$\left\{x \in R \middle| \frac{x}{x+1} \leq 0\right\} \subseteq \{x \in R | x(x+1) \leq 0\}.$

6.Задайте графически следующие множества:

$A = \{x \in R | \exists y \in R, x^2 + y^2 = 1\};$

$B = \{x \in R | y \in R, (x+1)^2 + (y-3)^2 > 4\};$

$C = \{x \in R | y \in R, (x+1)^2 + y^2 \leq 9\};$

$D = \{x \in R | y \in R, (x+4)^2 + (y-2)^2 \geq 1\};$

$E = \{x \in R | y \in R, x^2 + (y+1)^2 < 4\};$

7. Доказать тождество:

$A \backslash B = A \cap \bar{B};$

$A \cup (B \backslash C) = (A \cup B) \cap (A \cup \bar{C});$

$(A \backslash B) \cup (A \cap B) = A;$

$A \cup B = A \cap (\bar{A} \cup B);$

$(A \cup B) \cap (\bar{B} \cup A) = A;$

$(A \cup B) \backslash (A \cap B) = (A \backslash B) \cup (B \backslash A);$

$(A \backslash B) \cup B = A;$

$(B \backslash C) \cup (B \backslash A) = A \backslash C;$

$(A \cap B) \backslash A = \emptyset;$

$(A \cap B) \backslash C = (A \backslash C) \cap B.$

II. ПРЕДЕЛЫ

Определение: $a = \lim\limits_{x \to x_0} U(x) \Leftrightarrow \forall\, \delta > 0$ такое, что $\forall x$ из того, что

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |U(x) - U(x_0)| < \varepsilon$$

Свойства пределов:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} \big(U(x) \pm V(x)\big) = \lim\limits_{x \to x_0} U(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} V(x);$

2. $\lim\limits_{x \to x_0} \big(C \cdot U(x)\big) = C \cdot \lim\limits_{x \to x_0} U(x), C = \text{const};$

3. $\lim\limits_{x \to x_0} \big(U(x) \cdot V(x)\big) = \lim\limits_{x \to x_0} U(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} V(x);$

4. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{U(x)}{V(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} U(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} V(x)}$, если $\lim\limits_{x \to x_0} V(x) \neq 0$;

5. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_1 x^m + b_2 x^{m-1} + \cdots + b_m} = 0$, если $n < m$;

6. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_1 x^m + b_2 x^{m-1} + \cdots + b_m} = \infty$, если $n > m$;

7. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_1 x^m + b_2 x^{m-1} + \cdots + b_m} = \dfrac{a_1}{b_1}$, если $n = m$.

Первый замечательный предел.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Второй замечательный предел.

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Первое правило Лопиталя.

Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, то $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, когда последний предел существует (конечный или бесконечный).

Второе правило Лопиталя.

Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, когда последний предел существует (конечный или бесконечный).

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-2}{x^3+5}$

Решение:

При подстановке получаем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Для устранения неопределенности разделим числитель и знаменатель на одночлен в наивысшей степени x^3. Получаем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^3}+\frac{3x}{x^3}-\frac{2}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{5}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}}{1+\frac{5}{x^3}}=\frac{0}{1}=0$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2+6x+8}{x^3+8}$

Решение:

При подстановке x=-2 получаем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Для устранения неопределенности разложим числитель и знаменатель на множители и сократим на общий множитель (x+2), который обращает в нуль знаменатель и числитель дроби:

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2+6x+8}{x^3+8}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x+4)}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\lim_{x\to-2}\frac{x+4}{x^2-2x+4}=$$

$$=\frac{-2+4}{(-2)^2-2(-2)+4}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-5}{x+1}$

Решение:

При подстановке получаем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Разделим числитель и знаменатель дроби на x.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-5}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{5}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}3-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=\frac{3-0}{1-0}=3$$

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$

Решение:

Данный предел имеет неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Применим правило Лопиталя и получим:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1+\ln x)'}{(e^x-e)'}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+\frac{1}{x}}{e^x}=\frac{3}{e}$$

Вычислите предел:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}-\frac{1}{n}\right)$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1+n}{n}\right)$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{6n^3-1}{n+3}\right)$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3+\sqrt{n+1}}{n^2}\right)$
5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^3-2n}{n+1}\right)$
6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}+\sqrt{2n^2-1}\right)$
7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$
8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n}+\frac{2n}{3n+1}\right)$
9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+2}{4n^2-1}\right)$
10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2-n+2}{n-1}\right)$
11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{6n-5}{n^2+1}\right)$
12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{(n+1)^2}\right)$
13. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)(n+2)(n-1)}{n^4+2n+3}\right)$
14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n^2+1}+\frac{1}{n}\right)$
15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{n+4}+1\right)$
16. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n}{n-\sqrt{n}}\right)$
17. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{n^2+1}\right)$
18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$
19. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}\right)$
20. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}}\right)$
21. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+3}+\sqrt{n-1}\right)$
22. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{n+1}$
23. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{4n-1}}{\sqrt{n}}\right)$
24. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2-2}+\sqrt[3]{8n^3+1}}{\sqrt{3n^2+4}}\right)$
25. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$
26. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n-3}$

Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+3}+\sqrt[3]{8x^3-2}}{\sqrt[5]{x^5-2}}\right)$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3x^2+1}+\frac{x^2}{3x+2}\right)$
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)$
7. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+5x-6)$
8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+3x}{2x+1}\right)$
9. $\lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{1+x}{x+3}\right)$
10. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{1-\cos x}$
11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+4}{10x+1}\right)$
12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{x+4}\right)$
13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{x}{x+2}\right)$
14. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$
15. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{sin^2x}-\frac{1}{4sin^2\frac{x}{2}}\right)$
16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{x+1}+\frac{1}{x}\right)$
17. $\lim\limits_{x\to 10}\left(\frac{(x-1)^2-9}{x-10}\right)$
18. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{x-3}{x^2-8x+15}\right)$
19. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{cos\,2x}{cos\ x-sin x}$
20. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{sin\,x}{1-cos\,x}\right)$
21. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$
22. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+1}{x^2+2x+1}$
23. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{sin\ x-cos x}{cos\,2x}$
24. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{2x}$
25. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin\,7x}{\sqrt{1+x}-1}$
26. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\,x-cos x}{x}$
27. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos x}{5x}$
28. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{cos\ x-sin x}{cos x}$
29. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin^2 2x}{x^2}$
30. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{sin x}$
31. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3tg^2 2x}{cos^2 2x}$
32. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+4}$
33. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{x}\right)^{x-3}$
34. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}$
35. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+2}\right)^{x-1}$

III. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Таблица производных

1. $(c)' = 0$
2. $(ax)' = a$
3. $(ax + b)' = a$
4. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
5. $(\sin x)' = \cos x$
6. $(\cos\ x)' = -\sin\ x$
7. $(e^x)' = e^x$
8. $(a^x)' = a^x \cdot \ln\ a$
9. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
10. $(\log_a\ x)' = \frac{1}{x \ln a}$
11. $(tg\ x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
12. $(ctg\ x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
13. $(arctg\ x)' = \frac{1}{1+x^2}$
14. $(arcctg\ x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
15. $(arcsin\ x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
16. $(arccos\ x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Свойства производных

1. $(U \pm V)' = U' \pm V'$
2. $(U \cdot V)' = U'V + UV'$
3. $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$
4. $y = f(U), U = \mathrm{g}(x);$ $y' = f'(U) \cdot U'$

Пример 1. Найти производные функций:

1. $f(x) = 2 + x^3 + 3x^2 - \sin x + \cos\ x + 4tg\ x - 3ctg\ x + \log_2 x + 3\ln\ x;$
2. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1};$
3. $f(x) = x\sin x;$
4. $f(x) = x \cdot arctg\ x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2).$

Решение:

1. $f'(x) = (2)' + (x^3)' + (3x^2)' - (\sin\ x)' + (\cos x)' + (4tg\ x)' - (3ctg\ x)' + (log_2 x)' + (3\ln x)' =$

$$= 3x^2 + 6x - \cos\ x - \sin x + \frac{4}{\cos^2 x} + \frac{3}{\sin^2 x} + \frac{1}{x\ln 2} + \frac{3}{x}$$

$$2.\ f'(x) = \frac{(x^2-1)'(x^2+1) - (x^2-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2x(x^2+1) - (x^2-1)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

$$3.\ f'(x) = (x\sin x)' = (x)'\sin\ x + x(\sin\ x)' = 1\cdot \sin\ x + x\cos x =$$

$$= \sin\ x + x\cos x$$

$$4.\ f'(x) = (x\cdot arctg\ x)' - \left(\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)' =$$

$$= (x)'arctg\ x + x(arctg\ x)' - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}(1+x^2)' =$$

$$= 1\cdot arctg\ x + \frac{x}{1+x^2} - \frac{2x}{2(1+x^2)} = arctg\ x$$

Для функции $z = f(x,y)$ двух переменных вычисляются частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ и полный дифференциал $df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy$.

Для функции полный дифференциал имеет вид:

$dz = \cos(x+y^2)\,dx + 2y\cdot\cos(x+y^2)\,dy.$

Если *x* и *y* сами являются функциями от *t* , то $\frac{dz}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{dy}{dt}$.

Пример 2. Найти производную функции:

$z = ln(x^2+y^2); x = \sin t\,, y = t^3.$

Решение:

Тогда $x_t' = \cos t\,;\ y_t' = 3t^2$ и $\frac{dz}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{dy}{dt} =$

$$= \frac{2x}{x^2+y^2}\cos t + \frac{2y}{x^2+y^2}3t^2 = \frac{2\sin t\cos\ t + 6t^5}{sin^2\ t + t^6} = \frac{2\sin 2t + 6t^5}{sin^2\ t + t^6}$$

Пример 3. Исследовать функцию $z(x,y) = x^3 + y^2 - 243x - 8y - 3$ на экстремум.

Решение:

1. Применим необходимое условие экстремума:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases}$$

Найдем: $z'_x = 3x^2 - 243,\ z'_y = 2y - 8.$ Получим:

$$\begin{cases} 3x^2 - 243 = 0, \\ 2y - 8 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9, \\ y = 4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = -9, \\ y = 4. \end{cases}$$

В результате получили две точки возможного экстремума: $M_1(9;4),\quad M_2(-9;4).$

2. Применим достаточное условие экстремума и вычислим

$\Delta = AC - B^2$, где $A = z''_{xx}(M_i), B = z''_{xy}(M_i), C = z''_{yy}(M_i), i = 1,2.$

Найдем $z''_{xx} = 6x,\ z''_{xy} = 0,\ z''_{yy} = 2.$

Согласно достаточному условию экстремума в точке $M_1(9;4)$

$$A = z''_{xx}(M_1) = 54,\ B = z''_{xy}(M_1) = 0,\ C = z''_{yy}(M_1) = 2,$$

$\Delta = 54 \cdot 2 - 0^2 = 108 > 0$. Следовательно, в точке $M_1(9;4)$ существует экстремум. Так как $A = z''_{xx}(M_1) = 54 > 0$, то $M_1(9;4)$ - точка минимума функции, $z_{\min}(9;4) = -740.$

Согласно достаточному условию экстремума в точке $M_2(-9;4)$

$$A = z''_{xx}(M_2) = -54,\ B = z''_{xy}(M_2) = 0,\ C = z''_{yy}(M_2) = 2,$$

$\Delta = -54 \cdot 2 - 0^2 = -108 < 0$. Следовательно, в точке $M_2(-9;4)$ у функции экстремума нет.

Пример 4. Исследовать на условный экстремум функцию $f = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ при условии $x - y = 2$.

Решение:

Перепишем условие связи в виде $x - y - 2 = 0$, тогда $\varphi(x, y) = x - y - 2$.

Найдем частные производные функций $f(x,y), \varphi(x,y)$ первого и второго порядка:

$$f'_x = -\frac{1}{x^2},\ f'_y = \frac{1}{y^2},\ f''_{xx} = \frac{2}{x^3},\ f''_{xy} = 0,\ f''_{yy} = -\frac{2}{y^3},$$

$$\varphi'_x = 1,\ \varphi'_y = -1,\ \varphi''_{xx} = \varphi''_{xy} = \varphi''_{yy} = 0.$$

Запишем необходимое условие условного экстремума $\begin{cases} \dfrac{f'_x(x,y)}{\varphi'_x(x,y)} = \dfrac{f'_y(x,y)}{\varphi'_y(x,y)} \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} = -\dfrac{1}{y^2}, \\ x - y = 2. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = y, \\ x - y = 2, \end{cases} - \textit{не имеет решений} \\ \begin{cases} x = -y, \\ x - y = 2. \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \quad M_0(1;-1) \quad \text{- точка}$$

возможного условного экстремума.

Найдем значения вторых частных производных в этой точке:

$$f''_{xx}(1;-1) = 2,\ f''_{xy}(1;-1) = 0,\ f''_{yy}(1;-1) = 2.$$

Применим достаточное условие условного экстремума:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & f''_{xx} - \dfrac{f'_y}{\varphi'_y} \cdot \varphi''_{xx} & f''_{xy} - \dfrac{f'_y}{\varphi'_y} \cdot \varphi''_{xy} \\ \varphi'_y & f''_{xy} - \dfrac{f'_y}{\varphi'_y} \cdot \varphi''_{xy} & f''_{yy} - \dfrac{f'_y}{\varphi'_y} \cdot \varphi''_{yy} \end{vmatrix}.$$

Получим: $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 < 0$. Это означает, что точка $M_0(1;-1)$ - точка условного минимума, $f_{\min}(1;-1) = 2.$

Найти производную функции:

$1.\ y = x - tg\ x + 1$ $\qquad$ $2.\ y = 3x - 2\ sin\ x$

$3.\ y = xtg\ x + 10$ $\qquad$ $4.\ y = -\frac{x}{3} + \frac{3x}{2} - 5$

5. $y = \frac{4x^3-2x^2+x+1}{x}$

6. $y = \frac{5\sqrt{x^2+x-1}}{\sqrt{x}}$

7. $y = \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$

8. $y = \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x}$

9. $y = \left(\sqrt{x} + \sqrt{2}\right)(e^x + e)$

10. $y = \left(2 + \sqrt{x}\right)\left(1 + \sqrt{x}\right)$

11. $y = -\frac{x}{4}\cos x + \frac{x}{4}\sin x$

12. $y = e^x \sin\frac{x}{2}\sin x$

13. $y = \frac{x+1}{x}\,arctg\, x$

14. $y = \frac{3^x}{\sqrt{x}} + \sqrt{3}$

15. $y = \frac{2}{2-\sqrt{x}}$

16. $y = \frac{2x+1}{x+2\sqrt{x}}$

17. $y = (5-3x)^2$

18. $y = \cos^2 x$

19. $y = \sqrt{5x} - 3$

20. $y = \sqrt{arctg\, x}$

21. $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+5x}}$

22. $y = \ln(\sin x + \cos x)$

23. $y = ctg\left(5(x^2 + x - 1)\right)$

24. $y = \frac{x+1}{x-1}$

25. $y = -\frac{\sin x}{1 + tg\, x}$

26. $y = arctg\left(\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$

27. $y = \frac{1}{\cos(3-7x)}$

28. $y = \frac{\sin(0{,}5x+1)}{\sin 0{,}5}$

29. $y = \ln(x^2 - 2x + 7)$

30. $y = \frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}$

31. $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{3x}$

32. $y = x^2 \cdot tg\, x$

33. $y = \frac{1}{\sin^2(x^3-1)}$

34. $y = \frac{\ln(\cos x)}{\ln(\sin x)}$

35. $y = \sin^2(x^3 - 2x + 1)$

36. $y = \sqrt{1 + 5\cos 3x}$

37. $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-2tg\, x}}$

38. $y = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x}}{x}$

Найти производную и полный дифференциал функции:

1. $z = x^2 + sin\, y^2$
2. $z = \ln(xy^2)$
3. $z = \dfrac{x}{x + sin\, y}$
4. $z = \dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{\sin x}{\ln y}$
5. $z = \ln(x+y), x = t^3, y = t^2$
6. $z = \dfrac{x-2y^2}{x+y} - \dfrac{2x}{x-y}$
7. $z = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} - 2x^2y + 4$
8. $z = 4x^2 - 3\sqrt{x}y^3 + 4$
9. $z = \ln^2(x+y) - 2x^2y + \sqrt{y} - 3x$
10. $z = \sqrt[3]{x} - \dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{y}} + 2x^3$

IV. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

С помощью теории дифференциального исчисления можно исследовать функции и строить их графики.

План исследования функции.

1. Найти область определения и множество значений функции.
2. Установить, является ли функция четной, нечетной:

если $f(-x) = f(x)$, то функция *четная* – график функции симметричен относительно оси Oy;

если $f(-x) = -f(x)$, то функция *нечетная* – график функции симметричен относительно начала координат.

3. Проверить, является ли функция периодической:

функция *f(x)* называется *периодической*, если существует число T≠0 такое, что для любого значения *x* из области определения функции выполняется равенство $f(x+T) = f(x)$.

4. Исследовать непрерывность функции, определить точки разрыва.
5. Найти асимптоты графика функции:

а) *вертикальные* асимптоты:

прямая $x=x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ равно $+\infty$ или $-\infty$. Исследовать поведение функции при приближении к асимптоте слева и справа (левосторонние и правосторонние пределы);

б) *наклонные* асимптоты: $y = kx + b$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad\qquad b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx)$$

6. Найти *экстремумы* функции: в точках, подозрительных на экстремум, первая производная функции обращается в ноль или не существует; в точке максимума (минимума) вторая производная меньше нуля (больше нуля).

7. Участки *возрастания* и *убывания* функции: функция возрастает (убывает), если первая производная больше (меньше) нуля.

8. Исследовать функцию на *выпуклость*, определить *точки перегиба*.

9. Исследовать функцию на бесконечности: найти $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.

10. Найти точки пересечения графика функции с осями координат и дополнительные характерные точки графика.

11. Построить график функции.

Пример 1. Исследовать функцию $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$ и построить ее график.

Решение:

1. Область определения функции: множество всех действительных чисел, кроме $x = 1$.

2. $f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{-x-1} = \frac{x^2+1}{-x-1}$, следовательно, функция общего вида.

3. Функция непериодическая.

4. $x = 1 -$ точка разрыва (с учетом п. 1).

5. Асимптоты.

Исследуем поведение функции вблизи точки разрыва $x = 1$.

Так как $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = -\infty$, то прямая x=1 – вертикальная асимптота графика функции. Если $x \longrightarrow \pm\infty, y \longrightarrow \pm\infty$, следовательно, горизонтальных асимптот у графика функции нет.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x(x-1)} = 1,\ b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2+1}{x-1} - x\right) = 1.$$

Таким образом, график функции имеет наклонную асимптоту $y = x + 1$.

6. Вычислим первую производную функции для нахождения точек экстремума:

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}.$$

Решаем уравнение $x^2 - 2x - 1 = 0$ и находим точки возможного экстремума (критические точки): $x_1 = 1 - \sqrt{2}, x_2 = 1 + \sqrt{2}.$

Исследуем знак первой производной. Критические точки и точки разрыва разделяют область определения функции на интервалы:

$\left(-\infty; 1-\sqrt{2}\right), \left(1-\sqrt{2}; 1\right), \left(1; 1+\sqrt{2}\right), \left(1+\sqrt{2};\ +\infty\right).$

В каждом из этих интервалов производная сохраняет знак: в первом – плюс, во втором – минус, в третьем – минус, в четвертом – плюс.

Получаем точки экстремума максимума $\left(1-\sqrt{2}; 2-2\sqrt{2}\right)$, минимума $(1+\sqrt{2};\ 2+2\sqrt{2})$.

7. На основе предыдущего исследования функция возрастает на промежутке $\left(-\infty; 1-\sqrt{2}\right), \left(1+\sqrt{2};\ +\infty\right)$, убывает – на $\left(1-\sqrt{2}; 1\right), (1; 1+\sqrt{2})$.

8. Для нахождения точек перегиба вычислим вторую производную:

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2x-1)}{(x-1)^4} = \frac{4}{(x-1)^3}.$$

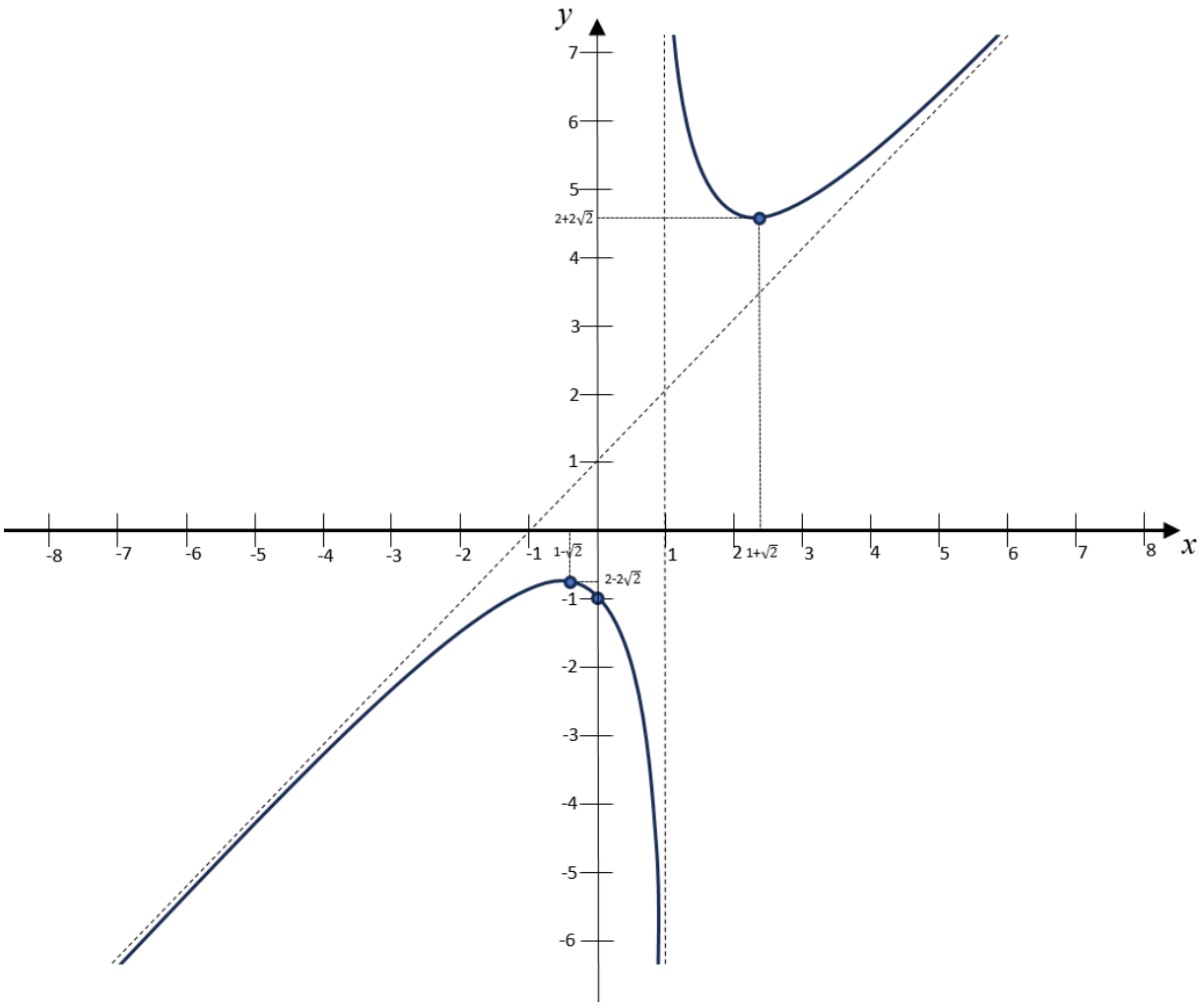
Так как вторая производная не обращается в нуль, то критических точек нет, следовательно, точек перегиба нет.

Проверив знак второй производной на каждом интервале получаем, что график направлен выпуклостью вверх на $(-\infty; 1)$, а на $(1; +\infty)$ – вниз.

9. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

10. Так как уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет действительных корней, то график функции не имеет точек пересечения с осью Ox, но пересекает ось Oy в точке (0; -1).

11. По полученным данным строим график функции.



Пример 2. Провести полное исследование функции и построить ее график $y = \dfrac{3x^2 + 2}{x^2 - 4}$.

Решение:

1. Область определения: $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow$

$$D(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty).$$

2. Четность.

Функция четная, т.к. $f(-x) = \dfrac{3(-x)^2 + 2}{(-x)^2 - 4} = \dfrac{3(x)^2 + 2}{(x)^2 - 4} = f(x).$

В силу четности, график функции симметричен относительно оси *OY*. Поэтому дальнейшее исследование проведем только для $x \geq 0$.

3. Периодичность.

Непериодическая функция, так как это дробно-рациональная функция.

4. $x = \pm 2$ - точки разрыва (с учетом п. 1).

5. Асимптоты.

а) Вертикальные асимптоты.

Исследуем поведение функции вблизи точки разрыва x=2.

$$\lim_{x \to 2+0} \frac{3x^2 + 2}{x^2 - 4} = +\infty.$$

$$\lim_{x \to 2-0} \frac{3x^2 + 2}{x^2 - 4} = -\infty$$

Таким образом, имеется вертикальная асимптота $x=2$; $x=-2$ – вертикальная асимптота, симметричная асимптоте x=2.

б) Наклонные асимптоты.

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 2}{(x^2 - 4)x} = 0;$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x^2 + 2}{x^2 - 4} - 0 \cdot x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 2}{x^2 - 4} = 3.$$

Следовательно, прямая $y = 3$ – горизонтальная асимптота при $x \to +\infty$.

6. Вычисление первой производной.

$$y' = \left(\frac{3x^2+2}{x^2-4}\right)' = \frac{6x(x^2-4)-(3x^2+2)2x}{(x^2-4)^2} = \frac{6x^3-24x-6x^3-4x}{(x^2-4)^2} =$$

$$= \frac{-28x}{(x^2-4)^2}.$$

Тогда $y'(x)=0 \Rightarrow x=0$.

Получаем точку, подозрительную на экстремум: $x=0$.

Составим таблицу, из которой видно, что точка $x=0$ –точка максимума.

x	$(-\infty;-2)$	$(-2;0)$	$(0;2)$	$(2;+\infty)$
y'	>0	>0	<0	<0

Таким образом, (0;-0,5) – точка максимума функции.

7. На $(-\infty;-2)$ и (-2;0) функция возрастает; на (0;2) и $(2,+\infty)$ функция убывает.

8. Вычисление второй производной.

$$y'' = \left(\frac{-28x}{(x^2-4)^2}\right)' = \frac{(-28)(x^2-4)^2-(-28x)\cdot 2\cdot(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-4)^4} =$$

$$= \frac{(-28)\cdot(x^2-4)\cdot(x^2-4-4x^2)}{(x^2-1)^4} = \frac{28(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}.$$

Вторая производная в нуль не обращается. Составим таблицу для второй производной.

x	$(-\infty;-2)$	$(-2;2)$	$(2;\infty)$
y''	>0	<0	>0
y	вып. вниз	вып. вверх	вып. вниз

9. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3.$

10. С осью Ох точек пересечения нет, с осью Оу – (0;-0,5).

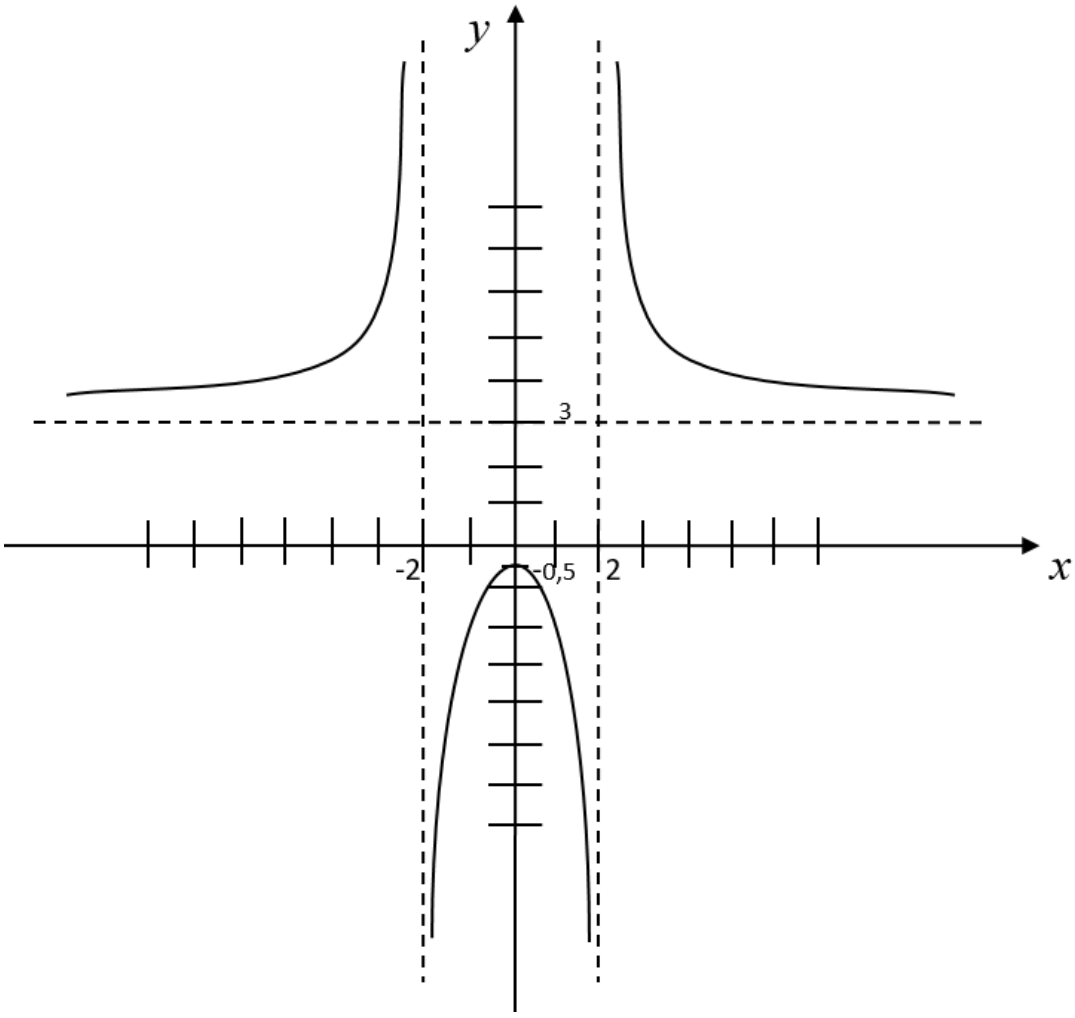
Для более точного построения графика функции предварительно найдем значение функции в дополнительных точках:

x	1	3
y	-5/3	29/5

Составим общую таблицу.

x	0	(0, 2)	2	(2,+∞)
y''	>0	>0	не сущ.	<0
y'	0	>0	не сущ.	<0
y	-0,5	↗	не сущ.	↘
	макс.	вып. вверх		вып. вниз

11. Построение графика.



Исследовать функцию и построить ее график.

$y = 2x^4 - x^2 + 1$

$y = x^5 - x^3 - 2x$

$y = 1 - \frac{2}{x}$

$y = 2 - \frac{1}{x-1}$

$y = \frac{1}{x(x-1)}$

$y = x + \frac{x}{3x-1}$

$y = \frac{x^2-4}{3x^2-27}$

$y = \frac{2x^2-6}{x^2-9}$

$y = \frac{x^2+5}{x^2-1}$

$y = \frac{x^2-3}{x^2+3}$

$y = \frac{x^2-4}{x^2-1}$

$y = \frac{x^2+2}{x^2+1}$

$y = 1 + \frac{2x}{1+x^2}$

$y = \frac{3}{x^2-x-6}$

$y = \frac{2x}{x^2+1}$

$y = \frac{x^3}{x^2-1}$

$y = 1 + \frac{2x+1}{x^2}$

$y = \frac{x^3}{3-x^2}$

$y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$

$y = \frac{1-x^2}{x+2}$

$y = x^2 - \ln x$

$y = e^{x-x^2}$

$y = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$

$y = \frac{2x}{\ln x}$

$y = (x-1)e^{-x}$

$y = \ln(x^2-1)$

$y = xe^x$

$y = 3\ln(2+x^2)$

V. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Определение. *Неопределенным интегралом* от функции *f(x) называется* множество функций *F(x)+C*, где функция *F(x)* – первообразная для функции *f(x)*, *C* – произвольная постоянная:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Таблица интегралов

1) $\int dx = x + C;$ 2) $\int (ax + b)dx = \frac{ax^2}{2} + bx + C;$

3) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1; x \neq 0, \text{если } n < 0);$

4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (a \neq 1);$

5) $\int \sin(mx)\, dx = -\frac{1}{m}\cos(mx) + C;$

6) $\int \cos(mx)\, dx = \frac{1}{m}\sin(mx) + C;$

7) $\int e^x dx = e^x + C;$

8) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, (x \neq 0);$

9) $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg\ x + C;$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$

11) $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tg\ x + C, (x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2});$

12) $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctg\ x + C, (x \neq k\pi);$

13) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg\ \frac{x}{a} + C;$

14) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C, a \neq 0;$

15) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, a \neq 0;$

16) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C;$

17) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin\frac{x}{a} + C, (|x| < a);$

18) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C, |x| > a.$

Свойства интегралов:

1) $\int \big(u(x)+v(x)\big)dx = \int u(x)dx + \int v(x)dx;$

2) $\int cu(x)dx = c\int u(x)dx,$ где с $= const;$

3) $\int udv = uv - \int vdu -$ формула интегрирования по частям;

4) $\int f(u)du = \int f(x)dx + C,$ это свойство позволяет вычислять интегралы независимо от обозначения переменной интегрирования;

5) Интегрирование с подстановкой (замена переменной):

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int f(z)dz, z = g(x);$$

6) $\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = f(x);$

7) $\int \frac{df}{dx}(x) = f(x) + C.$

Свойства определенного интеграла:

1) $\int_a^a f(x)dx = 0;$

2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$

3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$

4) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, где F($x$) – первообразная (неопределенный интеграл) – формула Ньютона-Лейбница.

Пример 1. Найти неопределенный интеграл:

$$\int \frac{xdx}{1-x^2}$$

Решение:

обозначим $u = 1 - x^2$; тогда $du = -2xdx$; $xdx = -\frac{du}{2}$, в итоге получим

$$\int \frac{xdx}{1-x^2} = -\int \frac{du}{2u} = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = -\frac{1}{2}\ln|u| + C = -\frac{1}{2}\ln|1-x^2| + C.$$

Пример 2. Вычислить интеграл:

$$\int_{-3}^{1}(2x^3 + 7x^2 - 3x - 1)dx$$

Решение:

$$\int_{-3}^{1}(2x^3 + 7x^2 - 3x - 1)dx = \int_{-3}^{1}2x^3dx + \int_{-3}^{1}7x^2dx - \int_{-3}^{1}3xdx - \int_{-3}^{1}dx =$$

$$= 2\int_{-3}^{1}x^3dx + 7\int_{-3}^{1}x^2dx - 3\int_{-3}^{1}xdx - \int_{-3}^{1}dx = \left(2\frac{x^4}{4} + 7\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} -\right.$$

$$\left.-x\right)|_{-3}^{1} = \frac{(1)^4}{2} + 7\frac{(1)^3}{3} - 3\frac{(1)^2}{2} - 1 - \left(\frac{(-3)^4}{2} + 7\frac{(-3)^3}{3} - 3\frac{(-3)^2}{2} - (-3)\right) = \frac{100}{3}$$

Вычислить неопределенные интегралы:

1. $\int(5x + x^3 - 3)dx$;
2. $\int(3x^2 - 5x + 2)dx$;
3. $\int\left(2\sqrt{x} - \frac{3}{x}\right)dx$;
4. $\int\left(\frac{2}{x\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2}\right)dx$;
5. $\int x^2(x^2 - 2)dx$;
6. $\int\frac{x^3-2x+3}{3x}dx$;
7. $\int\frac{(x-1)^3}{5\sqrt{x}}dx$;
8. $\int\left(5e^x + 3\sqrt[3]{x^2}\right)dx$;

9. $\int \left(-2cosx + \frac{2}{\sqrt{4-4x^2}}\right) dx;$

10. $\int \left(3sinx - \frac{4}{\sqrt{9-9x^2}}\right) dx;$

11. $\int \frac{x^3-1}{2(1+x^2)} dx;$

12. $\int \frac{x^2}{x^2-1} dx;$

13. $\int \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1} dx;$

14. $\int 2sin^2 \frac{x}{2} dx;$

15. $\int \frac{3cos2x}{cos^2 x sin^2 x} dx;$

16. $\int 4cos^2 \frac{x}{2} dx;$

17. $\int \frac{dx}{cos^2 x sin^2 x};$

18. $\int sin3x dx;$

19. $\int cos5x dx;$

20. $\int \frac{dx}{5-2x};$

21. $\int \frac{dx}{3x-5};$

22. $\int e^{-3x} dx;$

23. $\int \frac{cosx}{1+sinx} dx;$

24. $\int \frac{sin2x}{1+cos2x} dx;$

25. $\int \frac{dx}{x^2+9};$

26*. $\int \sqrt{4-x^2} dx;$

27. $\int \frac{dx}{x \ln x};$

28*. $\int \sqrt{1-x^2} dx;$

29. $\int \frac{x}{1+x^4} dx;$

30. $\int \frac{2e^x}{e^x-1} dx;$

31. $\int sin^3 x cosx dx;$

32. $\int e^{x^2} x dx.$

Вычислить определенные интегралы:

1. $\int_0^2 3x^2 dx;$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cosx dx;$

3. $\int_0^1 \frac{2dx}{1+x^2} dx;$

4. $\int_{-\pi}^{\pi} 3sin^2 \frac{x}{2} dx;$

5. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2}{x^2+1} dx;$

6. $\int_{-2}^{-1} \left(x + \frac{1}{3x^3} - 0{,}5\right) dx;$

7. $\int_2^3 \frac{(x^2+x-2)}{2(x-1)} dx;$

8. $\int_0^{-1} \frac{3(t^4-1)}{1+t^2} dt;$

9. $\int_0^{2\pi} \left(sin3\varphi + cos\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi;$

10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\frac{x}{3} cos\frac{x}{3} dx;$

11. $\int_{-1}^1 \frac{2^x-3^x}{6^x} dx;$

12. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{3dx}{1+cos2x} dx;$

13. $\int_{-1}^{0} 2x(x^2-3)dx$;

14. $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{(2x-1)}{x^2-x+1}dx$;

15. $\int_{1}^{e} \frac{2\sqrt{\ln x}}{x}dx$;

16. $\int_{0}^{1}(e^x-1)^{10}e^x dx$;

17. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(sin^2x+3sinx+1)cosxdx$;

18. $\int_{-1}^{0} 3x(x^2-4)^7 dx$.

Вычислить интегралы:

1. $\int \ln x dx$;

2. $\int_{1}^{e} \ln^2 x dx$;

3. $\int x\ \ln(3x+2)dx$;

4. $\int_{-1}^{1} \frac{xdx}{e^{x^2}}$;

5. $\int xe^{-x}dx$;

6. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sinx\ cos^2 x dx$;

7. $\int (x^2-3x+2)\ln x dx$;

8. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cosx\ sin^2 x dx$;

9. $\int x^2 e^{-\frac{x}{2}}dx$;

10. $\int_{-1}^{1} 2x^2 e^{-x}$;

11. $\int \frac{x-1}{(x+2)(x-3)}dx$;

12. $\int \frac{2x-3}{(x-2)(x+5)}dx$;

13. $\int \frac{3x^2+2x-3}{3x(x-1)(x+1)}dx$;

14. $\int \frac{2x-1}{2(x-2)^3}dx$;

15. $\int \frac{dx}{x^4+x^2}$;

16. $\int \frac{5dx}{(x-1)^2(x+1)}$;

17. $\int \frac{(x^2+2)dx}{(x+1)^2(x-1)}$;

18. $\int \frac{3xdx}{x^2+3x+2}$;

19. $\int \frac{3dx}{(x+1)(x-2)}$;

20. $\int \frac{2dx}{(x^2+2)(x-1)^2}$;

21. $\int \ln(x-2)dx$;

22. $\int_{1}^{e} \ln x dx$;

23. $\int x\ \ln(2-3x)dx$;

24. $\int_{-1}^{1} \frac{xdx}{e^{x^2}}$;

25. $\int 3xe^x dx$;

26. $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} 2sinx\ cos^2 x dx$;

27. $\int (x^2-1)\ln(x+2)dx$;

28. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3cosx\ sin^2 x dx$.

Несобственные интегралы

1) *Несобственные интегралы* с бесконечными пределами интегрирования: $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{R\to+\infty} \int_a^R f(x)dx;$

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{R\to-\infty} \int\limits_{R}^{b} f(x)dx;$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to-\infty} \int\limits_{R}^{c} f(x)dx + \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{c}^{R} f(x)dx,$$

где с – любое число. Если данные пределы существуют и конечны, то их называют *несобственными интегралами I рода.* В этом случае интегралы называют *сходящимися*, в противном случае – *расходящимися*.

Пример 3. Вычислить интеграл: $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2}$

Решение:

$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{R\to-\infty} \int_R^0 \frac{dx}{1+x^2} dx = \lim\limits_{R\to-\infty} arctgx \Big|_R^0 = \lim\limits_{R\to-\infty} (arctg0 -$

$- arctgR) = 0 - (-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$, т.е. интеграл сходится.

2) *Несобственные интегралы от неограниченных функций*

Если функция *f(x)* определена на промежутке *[a,b)*, интегрируема на любом отрезке *[a,b-ε)*, заключенном в *[a,b)*, и не ограничена слева от точки *b* (ее называют особой), то

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0} \int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Если этот предел существует и конечен, то его называют *несобственным интегралом второго рода*, а интеграл называется *сходящимся*, в противном случае – *расходящимся*.

Если *x=a* – особая точка, то

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Если внутренняя точка отрезка *[a,b]* – точка $x=c$ – особая, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Если a и b – особые точки, то несобственный интеграл определяется как сумма:

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, где с – любая точка из (a,b).

Пример 4. Исследовать сходимость $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Решение: Подынтегральная функция $f(x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ не ограничена в окрестности точки *x=1*, т.е. *x=1* – особая точка.

$$\int_1^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} arcsin\, x \Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} arcsin\,(1-\varepsilon) =$$

$= \frac{\pi}{2}$, т.е. интеграл сходится.

Исследовать сходимость:

1) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$;
2) $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$;
3) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x}$;
4) $\int_0^{+\infty} \frac{1+\ln x}{x}\,dx$;
5) $\int_0^{+\infty} sinx\,dx$;
6) $\int_{-\infty}^0 xe^x dx$;
7) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$;
8) $\int_0^1 \ln x dx$;
9) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$;
10) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}$;
11) $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$;
12) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x^2}$;
13) $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$;
14) $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}dx}{x}$;
15) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$;
16) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}$;
17) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$;
18) $\int_1^{+\infty} \frac{arctg\, x}{x^2}dx$;
19) $\int_2^{+\infty} \frac{xdx}{x^4+1}$;
20) $\int_0^{+\infty} e^{-x} sin\, x dx$.

VI. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Для приближения функции $y = f(x)$ функцией вида $y = ax+b$, если заданы значения функции $y_1, y_2,\ldots,y_n$ при значениях $x_1, x_2,\ldots x_n$ аргумента составляется сумма квадратов разностей

$$z = \sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2$$

и оценивается ее минимум по a и b. Для этого находятся частные производные функции z по a и b и приравниваются к нулю:

$$\frac{\partial z}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)\,x_i = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b) = 0$$

Из последних двух равенств получаем систему уравнений для определения a и b:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n}x_i = \sum_{i=1}^{n}x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i + bn = \sum_{i=1}^{n}y_i \end{cases}$$

В которых x_i и y_i – данные значения аргумента и функции, n – число значений.

VII. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Определение. *Дифференциальным уравнением* называется уравнение, содержащее неизвестную функцию и ее производные.

Наибольший порядок производной, входящей в уравнение, называется *порядком* уравнения.

Пример 1. $y''+y'\sin x - y\cos x = -\sin x$ – дифференциальное уравнение второго порядка. Его решением является семейство функций $y=\sin x+C$, где C – произвольная постоянная. Выбирая конкретные значения произвольной постоянной, будем получать различные частные решения.

Основные типы дифференциальных уравнений

1. Дифференциальные уравнения, с разделяющими переменными: $\boldsymbol{F(y)dy=G(x)dx}$.

Способ решения: разделение переменных.

2. Дифференциальные уравнения 1 порядка: $\boldsymbol{y'+P(x)y = G(x)}$.

Способ решения: замена Бернулли: $\boldsymbol{y=UV;\ y'=U'V+UV'}$.

3. Дифференциальные уравнения 2 порядка с постоянными коэффициентами: $\boldsymbol{y''+P(x)y'+G(x)y=0}$.

Способ решения: замена $y=e^{kx}$, $y'=ke^{kx}$, $y''=k^2e^{kx}$, тогда

$\kappa^2 e^{kx} + Pke^{kx} + Ge^{kx} = 0$, выносим e^{kx}

$e^{kx}(k^2+Pk+G)=0$

$k^2+Pk+G=0$ – характеристическое уравнение

1) $k_1 \neq k_2$, $y(x)=c_1e^{k_1x} + c_2e^{k_2x}$;

2) $k_1 = k_2$, $y(x)=e^{kx}(c_1+c_2x)$;

3) $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$,

$y(x) = e^{\alpha x}(c_1\cdot\cos(\beta x)+c_2\cdot\sin(\beta x))$.

4. Неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами: $\boldsymbol{y''+P(x)y'+G(x)=f(x)}$.

Способ решения: общее решение неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами можно представить в виде $\boldsymbol{y_{он} = y_{оо} + y_{чн}}$.

Общее решение (y_{oo}) находим аналогично решению, описанному в пункте 3.

Пусть $Q_n(x)$ многочлен степени n. Если правая часть уравнения имеет вид $f(x)=Q_n(x)e^{mx}$, то частное решение представляется в виде $y_{чн} = R_n(x)e^{mx}$, где $R_n(x)$ – многочлен степени n с неопределенными коэффициентами, при условии, что m не является корнем характеристического уравнения;

частное решение имеет вид $y_{чн} = x^qR_n(x)e^{mx}$, если m является кратным корнем характеристического уравнения.

Если правая часть имеет вид $f(x)= Q_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$ или $f(x)=Q_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$, то частное решение ищется в виде $y_{чн} = e^{\alpha x}(R_n(x)\cos\beta+S_n(x)\sin\beta x)$, если $\alpha\pm\beta i$ не является корнем характеристического уравнения.

Частное решение имеет вид $y_{чн} = x^q e^{\alpha x}(R_n(x)\cos\beta x+S_n(x)\sin\beta x)$, если $\alpha\pm\beta i$ является q-кратным корнем характеристического уравнения. $R_n(x)$ и $S_n(x)$ - многочлены n-ой степени с неопределенными коэффициентами.

Если правая часть представляет собой комбинацию выше указанных функций, то частное решение уравнения равно сумме решений, соответствующих каждому члену данной комбинации.

Пример 2. Решить уравнение $(1+2y)x\,dx+(1+x^2)dy=0$.

Решение:

Данное уравнение относится к типу 1 и решаем методом разделения переменных.

$$(1+x^2)dy= - (1+2y)xdx$$

$$\frac{dy}{(1+2y)} = -\frac{xdx}{1+x^2}$$

Интегрируя обе части уравнения, получаем

$$\int \frac{dy}{1+2y} = -\int \frac{xdx}{1+x^2}$$

$\frac{1}{2}\ln(1+2y) = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \ln C$

$\ln(1+2y) = -\ln(1+x^2) + \ln C^2$

$\ln(1+2y) = \ln\frac{C_1}{1+x^2}$, потенцируя обе части уравнения, имеем

$|1+2y| = \left|\frac{C_1}{1+x^2}\right|$. Отсюда, $y = \frac{C_1}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2}$.

Пример 3. Решить уравнение $y' - \frac{2}{1+x}y = (1+x)^3$. Решить задачу Коши, если $y(0)=1$.

Решение:

Данное уравнение – дифференциальное уравнение 1 порядка, следовательно, решаем заменой Бернулли (см. тип 2).

Замена Бернулли: $y=UV$; $y'=U'V+UV'$.

Подставляем данную замену в исходное уравнение

$U'V+UV' - \frac{2}{1+x}UV = (1+x)^3$.

Выносим общий множитель U, получаем $U'V+U(V' - \frac{2}{1+x}V) = (1+x)^3$.

1) $V' - \frac{2}{1+x}V = 0$, далее решаем как уравнение с разделяющими переменными:

$\frac{dV}{dx} - \frac{2}{1+x}V = 0$

$\int\frac{dV}{V} = \int\frac{2dx}{1+x}$, получаем $\ln|V| = 2\ln|1+x|$, тогда $V=(1+x)^2$.

2) $U'V=(1+x)^3$, подставляем $V=(1+x)^2$ и решаем уравнение вида

$\frac{dU}{dx}(1+x)^2 = (1+x)^3$, сокращаем и получаем $\frac{dU}{dx}=1+x$.

Тогда, $dU=(1+x)dx$, обе части интегрируем

$\int dU = \int dx + \int xdx$

$U = x + \frac{x^2}{2} + C$.

Общее решение исходного уравнения имеет вид: $y = (1+x)^2\left(x + \frac{x^2}{2} + C\right)$.

Решаем задачу Коши. Для этого, в общее решение исходного уравнения подставим y(0)=1.

$1=(1+0)^2\ (0+\frac{0}{2}+C)$, тогда, C=1. Следовательно, $y=(1+x)^2\ (x+\frac{x^2}{2}+1)$.

Пример 4. Решить уравнение $y''+4y'+4y=x^2+e^x-\sin x$.

Решение:

Исходное уравнение является неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами (см. тип 4).

Решением данного уравнения является $y_{он}=y_{оо}+y_{чн}$.

Введем замену $y=e^{kx}$, $y'=ke^{kx}$, $y''=k^2e^{kx}$, тогда

$k^2e^{kx}+4ke^{kx}+4e^{kx}=x^2+e^x-\sin x$.

Для нахождения решения общего однородного уравнения, левую часть уравнения приравняем к нулю и решим полученное характеристическое уравнение: $k^2e^{kx}+4ke^{kx}+4e^{kx}=0$. Выносим общий множитель e^{kx} и решаем уравнение $e^{kx}(k^2+4k+4)=0$, тогда, $k^2+4k+4=0$ – является характеристическим уравнением, имеющим корни $k_{1,2}=2$. Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид: $y_{оо}=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}$.

Далее находим частное решение неоднородного уравнения

$y_{чн}=(Ax^2+Bx+C)+De^x+(E\cos x+F\sin x)$.

Подставляем в исходное дифференциальное уравнение

$2A+De^x-E\cos x-F\sin x+8Ax+4B+4De^x-4E\sin x+4F\cos x+4Ax^2+4Bx+4C+4De^x+4E\cos x+4F\sin x=x^2+e^x-\sin x$.

Приравниваем соответствующие коэффициенты, получаем систему:

$$\begin{cases} 4A=1, \\ 8A+4B=0, \\ 2A+4B+4C=0, \\ 9D=1, \\ 3E+4F=0, \\ -4E+3F=-1. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим коэффициенты

$A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = \frac{3}{8}$, $D = \frac{1}{9}$, $E = \frac{4}{25}$, $F = -\frac{3}{25}$ и получаем частное решение

$y_{чн} = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8} + \frac{1}{9}e^x + \frac{4}{25}\cos x - \frac{3}{25}\sin x.$

Общее решение неоднородного уравнения:

$y = C_1e^{2x} + C_2 xe^{2x} + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8} + \frac{1}{9}e^x + \frac{4}{25}\cos x - \frac{3}{25}\sin x.$

Решить уравнения:

1) $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$;
2) $(1 + y^2)dx - xy\,dy = 0$;
3) $y\,dy/dx + x = 1$
4) $x\,dy/dx + y = 3$;
5) $\sqrt{y}\,dx + x^2\,dy = 0$;
6) $(x + 1)^3\,dy - (y - 2)^2\,dx = 0$;
7) $y' = y^2\cos(x)$;
8) $y' = y$;
9) $3y' = (1+x^2)/y^2$;
10) $(x^2 + 1)dy - xy\,dx = 0$;
11) $y' + x^2y = x^2$;
12) $y' - y = e^x$;
13) $y' = 2y - 1$;
14) $y' + y/(1+x)+x^2 = 0$;
15) $y'\sin(x) - y = 1 - \cos(x)$;
16) $y' = 2x(x^2 + y)$;
17) $y' = x^2 + y$;
18) $y' = x^3y^3 - xy$;
19) $xy' + y = xy^2$;
20) $y' + ((1-4x)/x^2)y = 3$;
21) $y'' - 2y' = 0$;
22) $y'' + 5y' + 6y=0$;
23) $3y'' - 2y' - 8y = 0$;
24) $y'' + 4y' + 13y=0$;
25) $y'' + y' + y = 0$;
26) $y'' - 6y' + 9y=0$;
27) $y'' - y = 2$;
28) $y'' + 2y' = 2$;
29) $3y'' + 4y' = x^3 + x$;
30) $y'' - 2y' - 3y = \sin(t)$;
31) $y'' - 2y' - 3y = x^2 - x + 1$;
32) $y'' + y = x - x^2$;
33) $y'' - 3y' + 2y = x^3 + x - 2$;
34) $y'' - 6y' + 9y = 6xe^{3x}$;
35) $y'' - 4y' + 3y = 2e^{2x} + \sin x$;
36) $y'' - 5y' + 6y = \cos x - x^2$;
37) $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$;
38) $2y'' - 3y' + y = 4\sin x - x$;
39) $3y'' + 2y' - 2y = x^3 - e^x + \cos x$;
40) $2y'' + 3y' + 2y = x^3 + x - \cos x$.

Найти решение уравнений при заданных начальных условиях:

1) x dy = y dx, y(2)=6;
2) $3y^2dy=x^2dx$, y(3)=1;
3) $x' = 2+x$, x(0)=3;
4) $y'-(y/x)=0$, y(1)=5;
5) (x-1)dy=(y+1)dx, y(2)=8;
6) $y'=ky$, y(0)=3;
7) ytg(x)dx+dy=0, y(0)=8;
8) $y'=ay+b$, y(0)=0;
9) $y'=ky$, y(0)=a;
10) $y'=n(1/e^n)$, y(1)=0;
11) $y'+(3/x)y=2/x3$, y(1)=1;
12) $x^2y'+2xy=\ln(x)$, y(e)=1;
13) $y'\cos(x)-2y\sin(x)=2$, y(0)=3;
14) $y'=2x(x^2+y)$, y(0)=1;
15) $ny'+(n+1)y=3n^2(1/e^n)$, y(1)=0;
16) $y+y'=1/e^n$, y(0)=1;
17) $y'\sin(x)-y=1-\cos(x)$, $y(\pi/2)=1$;
18) $y'-4(y/x)=1/x$, y(2)=0;
19) $y'=x^2+y$, y(0)=1;
20) $xy'+y=xy^2$, y(1)=1;
21) $y''-3y'+2y=0$, y(0)=2, $y'(0)=3$;
22) $y''+2y'+5y=0$, $y(0)=y'(0)=1$;
23) $y''+6y'+9y=0$, y(0)=2, $y'(0)=1$;
24) $y''-y'-6y=2$, y(0)=1, $y'(0)=0$;
25) $y''-9y=2-a$, y(0)=0, $y'(0)=1$;
26) $y''+4y=2\cos(2t)$, y(0)=0, $y'(0)=4$.

Пример 5. Численность населения района в 2021 году составляла 100 тыс. чел., а годовой прирост равнялся 0,5 тыс. чел. Найти ожидаемое число жителей района в 2023 году, считая, что скорость прироста населения пропорциональна числу жителей.

Решение.

Примем 2021 год за t=0, а 2023 год за t=2. Так как скорость прироста y' пропорциональна числу жителей y, то получаем уравнение $\frac{dy}{dx}$ = ky с начальным условием y(0)=100. Уравнение перепишем в виде $\frac{dy}{y}$ = k dx. Интегрируя, получим $\int \frac{dy}{y} = \int k\,dx$+C или ln(y)=kx+C. Потенцируя, найдем $y=C_1e^{kx}$, где $C_1=e^c$.

Из условия задачи следует, что y(0)=100, y’(0)=0,5. Тогда $C_1e^0 = 100$, $kC_1e^0 = 0,5$ или $C_1=100$, k=0,5/100=0,005. Подставляя x=2 в уравнение $y=100e^{0,005x}$, получим $y=100e^{0,01}=101,005$. В 2023 году ожидаемая численность населения района составляет 101005 чел.

VIII. РЯДЫ

Определение. Пусть дана числовая последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Выражение вида $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *числовым рядом* или просто *рядом.*

Числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ называются *членами* ряда, член a_n – *общим членом* ряда.

Теорема (необходимое условие сходимости ряда)

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то его общий член стремится к нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Признаки сравнения

Теорема 1. Пусть даны два ряда с неотрицательными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и для всех n выполняется неравенство $a_n \leq b_n$. Тогда из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Признак Даламбера

Теорема 2. Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительнымип членами и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ = p. Тогда: а) при p<1 ряд сходится; б) при p>1 ряд расходится.

Признак Коши

Теорема 3. Если существует натуральное число N такое, что для числовой последовательности $\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\}$, построенной из членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$, для всех $n \geq N$ имеет место неравенство $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ = p, где $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - ряд с неотрицательными членами. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится при p<1 и расходится при p>1 (p=∞).

Интегральный признак

Теорема 4. Пусть дан ряд $f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, члены которого являются значениями некоторой функции f(x), положительной, непрерывной и убывающей на полуинтервале [1,+∞). Тогда если $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$; если $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ также расходится.

Определение. Ряд вида $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\ x^n$ называется *степенным* рядом.

Числа $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ - *коэффициенты степенного ряда.*

Число R называется *радиусом* сходимости ряда, если |x|< R - ряд сходится, при |x|>R – ряд расходится. Интервал (-R; R) называется *интервалом сходимости*. Радиус сходимости находим по формуле:

R = $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_n+1}\right|$, если соответствующий предел существует.

Задания

1. Проверить выполняется ли необходимое условие сходимости для ряда.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{1}{n}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

2. С помощью признака Даламбера исследовать, сходятся или расходятся ряды.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^5}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2^n}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

3. Найти радиус и область сходимости ряда.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^n$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x^n)^{n-1}}{n}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n\, x^n$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n+1}}{(2n-1)2^n}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty} (nx)^n$.

Определение. Функция *f(x)* называется *аналитической* в точке x_0, если для всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < r$, функция *f(x)* есть сумма некоторого степенного ряда: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x - x_0)^n$.

Определение. Если *f(x) аналитическая* в x_0, то в некоторой окрестности x_0 она дифференцируема любое число раз и

$f^{(k)}(x) = k! \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+k}^{k} a_{n+k}\,(x - x_0)^n$, тогда $f^{(k)}(x_0) = k!a_k$ и

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n$ *(ряд Тейлора)*

Разложение элементарных функций в ряд Тейлора:

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,\ |x| < +\infty;$

$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\,\frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots,\ -1 < x \le 1;$

$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,\ |x| < +\infty;$

$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots,\ |x| < +\infty;$

$(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots[\alpha-(n-1)]}{n!}x^n + \ldots,$
$-1 < x < 1.$

Пример. Разложить функцию $y = \sin 3x + 2e^{3x}$ в ряд Тейлора и вычислить ее значение в точке $x = 0{,}15$ с точностью до 0,01.

Решение:

Ряд y=sin(x) можно представить в виде

$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$, $(-\infty < x < \infty)$, тогда

$\sin 3x = \frac{3x}{1!} - \frac{3^3x^3}{3!} + \frac{3^5x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}3^{2n-1}}{(2n-1)!}$, $(-\infty < x < \infty)$.

Ряд $y = e^x$ можно разложить $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$, тогда

$e^{3x} = 1 + \frac{3x}{1!} + \frac{3^2x^2}{2!} + \ldots + \frac{3^nx^n}{n!} + \ldots$, $(-\infty < x < \infty)$.

Оба ряда сходятся на $(-\infty < x < \infty)$, следовательно, их можно сложить.

$y = \left(\frac{3x}{1!} - \frac{3^3x^3}{3!} + \frac{3^5x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}3^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots\right) + 2\left(1 + \frac{3x}{1!} + \frac{3^2x^2}{2!} + \frac{3^3x^3}{3!} + \ldots + \frac{3^nx^n}{n!} + \ldots\right) = 2 + 3\frac{3x}{1!} + 2\frac{3^2x^2}{2!} + \frac{3^3x^3}{3!} + 2\frac{3^4x^4}{4!} + \ldots$

Первый ряд знакочередующий, удовлетворяющий признаку Лейбница, если в качестве приближенного значения взять сумму первых k членов, то абсолютная погрешность будет меньше $|(k+1) - \text{члена}|$.

Если x=0,45, то $\sin 0{,}15 \approx \frac{3 \cdot 0.15}{1!} - \frac{3^3 0.15^3}{3!} + \frac{3^5 0.15^5}{5!} - \ldots$ Так как

$a_3 = \frac{3^5 0.15^5}{5!} \approx 0.00031$, значит можно взять сумму первых двух членов

$\sin 0{,}45 \approx 0{,}45 - 4{,}5 \cdot 0{,}15^3 \approx 0{,}45 - 0{,}01530$.

Если $0 < x \leq \frac{1}{2}$, то с точностью до 0,01 $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$, тогда

$e^{0{,}45} \approx 1 + 0{,}45 + \frac{0{,}45^2}{2} + \frac{0{,}45^3}{6}$. Выполнив окончательные расчеты, получили, что значение $y = \sin 3x + 2e^{3x}$ в точке x=0,15 с точностью до 0,01 равно 5,47.

Разложить функции в ряд Тейлора:

1) $f(x) = e^{-x^2}$;

2) $f(x) = \cos^2 x$;

3) $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$;

4) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$;

5) $f(x) = \ln(5+2x)$;

6) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$;

7) $f(x) = \frac{1}{1+2x}$;

8) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$;

9) $f(x) = \frac{3}{4-x}$;

10) $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-4x+3}$.

IX. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Определение. Прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов, называется матрицей размера $m \times n$.

Обозначается

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ или } A = \left\| a_{ij} \right\|_{m \times n},$$ где a_{ij} - элемент матрицы A, стоящий в i-ой строке и j-м столбце $\left(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}\right)$.

Произведением матрицы A на действительное число λ называется матрица, каждый элемент которой равен произведению соответствующего элемента матрицы A на число , то есть $\lambda \cdot A = \left\| \lambda \cdot a_{ij} \right\|$.

Суммой матриц A и B называется матрица C, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B. Пусть $A = \left\| a_{ij} \right\|$, $B = \left\| b_{ij} \right\|$. Тогда $C = A + B = \left\| c_{ij} \right\|$, где $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Произведением матрицы $A_{m \times n}$ на матрицу $B_{n \times k}$ называется матрица $C_{m \times k}$, каждый элемент c_{ij} которой равен скалярному произведению вектора – строки с номером i матрицы A на вектор – столбец с номером j матрицы B.

Пусть $A = \left\| a_{ij} \right\|,\ B = \left\| b_{ij} \right\|,\ C = A \cdot B = \left\| c_{ij} \right\|$. Обозначим A_i - строку с номером i матрицы A, B^j - столбец с номером j матрицы B. Тогда $c_{ij} = A_i \cdot B^j$.

Пример 1. Вычислить линейную комбинацию $2A+B$ матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$2A+B=2\cdot\begin{pmatrix}2&5&1\\0&3&2\\4&-1&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&2&3\\4&0&2\\3&5&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&10&2\\0&6&4\\8&-2&6\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}-1&2&3\\4&0&2\\3&5&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&12&5\\4&6&6\\11&3&2\end{pmatrix}.$$

Пример 2. Найти произведение матриц *A* и *B,* если

$$A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\\0&-2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&-3\\4&-4\end{pmatrix}.$$

Решение:

Матрица *A* размером 3×2, матрица *B* – размером 2×2. Так как число столбцов матрицы *A* равно числу строк матрицы *B*, то определено произведение матриц. Тогда, матрица $C=A\cdot B=\left\|c_{ij}\right\|$ будет иметь размерность 3×2: $C=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\\c_{31}&c_{32}\end{pmatrix}$.

Вычислим все элементы матрицы *C:*

$c_{11}=A_1\cdot B^1=1\cdot 2+(-1)\cdot 4=-2,$

$c_{12}=A_1\cdot B^2=1\cdot(-3)+(-1)\cdot(-4)=1,$

$c_{21}=A_2\cdot B^1=2\cdot 2+3\cdot 4=16,$

$c_{22}=A_2B^2=2\cdot(-3)+3\cdot(-4)=-18$

$c_{31}=A_3\cdot B^1=0\cdot 2+(-2)\cdot 4=-8,$

$c_{32}=A_3\cdot B^2=0\cdot(-3)+(-2)\cdot(-4)=8.$

Таким образом, матрица *C* имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 16 & -18 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}.$$

Основными методами решения систем линейных алгебраических уравнений являются метод Крамера, матричный метод и метод Гаусса. Первые два метода применяются только для решения систем с квадратной невырожденной матрицей. Методом Гаусса можно решать любую систему линейных алгебраических уравнений.

Пример 3. Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 10, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

Решение:

Выпишем матрицу системы и столбец свободных членов:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Найдем решение системы по формуле $X = A^{-1} \cdot B$.

Найдем матрицу A^{-1}:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 27.$$

Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 11,\ A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 3,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 3,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 9,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=7,\ A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=-2,\ A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=3.$$

Составим присоединенную матрицу: $A^{*}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 7\\ 11 & 3 & -2\\ -3 & 9 & 3\end{pmatrix}$.

Запишем обратную матрицу: $A^{-1}=\frac{1}{27}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3 & 7\\ 11 & 3 & -2\\ -3 & 9 & 3\end{pmatrix}$.

Вычислим $X=A^{-1}\cdot B$: $X=\frac{1}{27}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3 & 7\\ 11 & 3 & -2\\ -3 & 9 & 3\end{pmatrix}\cdot$

$$\cdot\begin{pmatrix}2\\ 10\\ -1\end{pmatrix}=\frac{1}{27}\cdot\begin{pmatrix}4+30-7\\ 22+30+2\\ -6+90-3\end{pmatrix}=\frac{1}{27}\cdot\begin{pmatrix}27\\ 54\\ 81\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}.$$

Ответ. $X=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$.

Пример 4. Решить систему линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=2,\\ -x_1+x_2+3x_3=10,\\ 4x_1-x_2-x_3=-1.\end{cases}$$

Решение:

В предыдущем примере вычислили определитель $\Delta=27$.

Найдем решение системы по формулам Крамера. Для этого вычислим определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 10 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 10 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 27$$ - заменили в определителе системы 1-й столбец столбцом свободных членов.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 10 & 3 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 10 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 54$$ - заменили в определителе системы 2-й столбец столбцом свободных членов.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 10 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 10 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 81$$ - заменили в определителе системы 3-й столбец столбцом свободных членов.

Найдем значения неизвестных по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{27}{27} = 1,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{54}{27} = 2,\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{81}{27} = 3.$$

Отметим, что эту же систему мы решили в предыдущем примере матричным методом, и ответы совпадают, как и следовало ожидать.

Ответ. $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3.$

Пример 5. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 10, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

Решение:

Выпишем расширенную матрицу системы и приведем ее элементарными преобразованиями к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 10 \\ 4 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{matrix} A_2+A_1 \\ \sim \\ A_3-4\cdot A_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & -9 & 3 & -9 \end{array}\right) \begin{matrix} A_3+3\cdot A_2 \\ \sim \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 9 & 27 \end{array}\right) \begin{matrix} \frac{1}{9}\cdot A_3 \\ \sim \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Запишем последнюю матрицу в виде системы линейных уравнений и обратным ходом метода Гаусса найдем решение.

$$\begin{cases} x_1 + 2\cdot x_2 - \quad x_3 = 2, \\ \quad 3\cdot x_2 + 2\cdot x_3 = 12, \\ \quad\quad\quad x_3 = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2\cdot x_2 + x_3 = 2 - 2\cdot 2 + 3 = 1, \\ x_2 = \frac{1}{3}(12 - 2\cdot x_3) = \frac{1}{3}(12 - 2\cdot 3) = 2, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

Ответ. $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$.

Пример 6. Найти общее и одно частное решения системы уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 10, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 + 7\cdot x_4 = -1. \end{cases}$$

Решение:

Составим расширенную матрицу системы и приведем ее элементарными преобразованиями к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & 10 \\ 4 & -1 & -1 & 7 & -1 \end{array}\right) \begin{matrix} A_2+A_1 \\ \sim \\ A_3-4\cdot A_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & -9 & 3 & 3 & -9 \end{array}\right) \begin{matrix} A_3+3\cdot A_2 \\ \sim \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 9 & 3 & 27 \end{array}\right) \begin{matrix} \frac{1}{9}\cdot A_3 \\ \sim \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Запишем последнюю матрицу в виде системы линейных уравнений и обратным ходом метода Гаусса найдем решение.

$$\begin{cases} x_1 + 2 \cdot x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 12, \\ x_3 + x_4 = 3. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 2 - 2(2 + \frac{2}{3}x_4) + 3 - x_4 - x_4 = 1 - \frac{10}{3}x_4, \\ x_2 = \frac{1}{3}(12 - 2x_3) = \frac{1}{3}(12 - 2(3 - x_4)) = 2 + \frac{2}{3}x_4, \\ x_3 = 3 - x_4, \\ x_4 = t, \quad t \in R. \end{cases}$$

Здесь t – параметр, принимающий любые значения из множества действительных чисел. Тогда общее решение системы имеет вид:

$$X_{общ} = (1 - \frac{10}{3}t, \quad 2 + \frac{2}{3}t, \quad 3 - t, \quad t), \; t \in \boldsymbol{R}.$$

Частное решение системы найдем, подставив в общее решение какое-нибудь значение свободной переменной, например, $t = 3$. Получим:

$$X_{частн} = (1 - \frac{10}{3} \cdot 3, \; 2 + \frac{2}{3} \cdot 3, \; 3 - 3, \; 3), \; X_{частн} = (-9, \; 4, \; 0, \; 3).$$

Ответ. $X_{общ} = (1 - \frac{10}{3}t, \quad 2 + \frac{2}{3}t, \quad 3 - t, \quad t), \; t \in \boldsymbol{R},$

$X_{частн} = (-9, \; 4, \; 0, \; 3).$

Задания:

1. Решить системы линейных уравнений матричным методом и методом Крамера:

1.1. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1, \\ 3x_1 + 7x_2 = 2; \end{cases}$ 1.2. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 4, \\ 4x_1 - 5x_2 = 10; \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1, \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0; \end{cases}$ 1.4. $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -2, \\ x_1 + 4x_2 = 3; \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} 7x_1+6x_2+3x_3+7x_4=3, \\ 3x_1+5x_2+7x_3+2x_4=-1, \\ 5x_1+4x_2+3x_3+5x_4=1, \\ 5x_1+6x_2+5x_3+4x_4=2; \end{cases}$ 1.6. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-x_4=9, \\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4=5, \\ 2x_1-5x_2+3x_3+x_4=16, \\ 4x_1+6x_2+2x_3-x_4=5. \end{cases}$

2. Решить системы линейных уравнений методом Гаусса.

2.1. $\begin{cases} x_1-x_2-x_3+2x_4=2, \\ x_1-x_2+3x_3-2x_4=1, \\ 2x_1+3x_2-2x_3+x_4=4, \\ x_1-x_2+3x_3-x_4=2; \end{cases}$ 2.2. $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3+x_4=3, \\ 4x_1-x_2+3x_3-x_4=6, \\ 2x_1+x_2-x_3+3x_4=5, \\ x_1-x_2+2x_3-5x_4=-2; \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3+x_4-x_5=1, \\ x_1-x_2+3x_3+x_4+2x_5=2, \\ 2x_1+x_2-x_3+3x_4-x_5=-1, \\ x_1+x_2+x_3-x_4=4; \end{cases}$ 2.4. $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=3, \\ -x_1+3x_2-4x_3=-1, \\ x_1-x_2+x_3=2, \\ 3x_1-x_2+5x_3=12; \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} 2x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=1, \\ x_1+2x_2-x_3+x_4-2x_5=1, \\ 4x_1-10x_2+5x_3+7x_5=1, \\ 2x_1-14x_2+7x_4+11x_5=-1; \end{cases}$ 2.6. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4=1, \\ 3x_1-2x_2+x_3-3x_4=2, \\ 5x_1+x_2-x_3+2x_4=-1, \\ 2x_1-x_2+x_3-3x_4=4. \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+2x_4=7, \\ 3x_1-x_2-x_3-2x_4=-11, \\ 2x_1-3x_2-2x_3-x_4=-11, \\ 5x_1-x_2-x_4=-10; \end{cases}$ 2.8. $\begin{cases} 3x_1-4x_2+x_3+x_4=-3, \\ 4x_1+x_2+3x_3-x_4=0, \\ 2x_1-x_2+x_3+2x_4=9, \\ x_1-x_2+2x_3+5x_4=12; \end{cases}$

2.9. $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4=3, \\ x_1-x_2+3x_3+x_4=6, \\ 2x_1-3x_2-x_3+3x_4=6, \\ x_1+x_2-2x_3-x_4=-1; \end{cases}$ 2.10. $\begin{cases} x_1-2x_2-2x_3=-9, \\ -x_1-3x_2+4x_3=5, \\ x_1-x_2+x_3=2, \\ -3x_1-x_2+5x_3=10; \end{cases}$

2.11. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ -4x_1 + 5x_3 + 7x_5 = -7, \\ 2x_1 - 4x_2 + 7x_4 + x_5 = 10; \end{cases}$ 2.12. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = -10, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -17, \\ 3x_1 - x_3 + 2x_4 = -6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -10. \end{cases}$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Раздел I. Элементы теории множеств

Значения коэффициентов для данного задания смотреть в **приложении 1**:

a_1, a_2, a_3, a_4.

Найти элементы множества $A = \left\{ x \in R \middle| \frac{a_1 x - a_2}{a_3 x + a_4} \geq a_1 \right\}$.

Раздел II. Пределы

Значения коэффициентов для данных заданий смотреть в **приложении 2**:

$a, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, b, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$.

Вычислить предел числовой последовательности:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^a + n\sqrt[a]{n}}{n^{a-1} + 2}\right)$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_1 n - \sqrt{a_2 n^b + a_3}\right)$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^{a_1}} + \frac{2n}{n\sqrt[b]{n}}\right)$;
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_2 n^b + 3n} + \sqrt{n^{b_1} + 2}\right)$;
5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{b_2 n + b_3}{n - b_2}\right)$;

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{\sqrt{n^b+n}}{\sqrt[a]{n-a}}\right)$;

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{b_2}{n}\right)^{n+2}$;

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+a}{n+a_1}\right)^{\frac{n}{b}}$;

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{b_1 n+b_2}{a_1 n+a_2}\right)^{n+a}$;

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_3 n+a_4}{b_3 n+b_4}\right)^{\frac{n-a}{b}}$.

Вычислите следующие пределы функций:

11. $\lim\limits_{x\to a}\frac{2(x-a)}{x^2-a^2}$;

12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{a_1-x}-\sqrt{a_1+x}}{2x}$;

13. $\lim\limits_{x\to a_1}\left(\frac{1}{x-a_2}-\frac{a_1}{x^2-(a_2)^2}\right)$;

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+a_3}\right)$;

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_4 x-a_5}{a_5 x+a_6}$;

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{bx-b_1}{b_1 x^2+b_2 x+a}$;

17. $\lim\limits_{x\to -a_2}\frac{x^3+b^3}{\sin(x-a_2)}$;

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{b_3 x-b_4}{b_3 x+b_5}\right)^{ax}$;

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{a_5x+a_6}{b_1x-a_1}\right)^x$;

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+a}\right)^{a_1x}$;

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{ax+b}{ax-b_3}\right)^{\frac{ax-b}{a_1}}$.

Раздел III. Дифференциальное исчисление

Значения коэффициентов для данных заданий смотреть в **приложении 3**:

$a, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2$.

Найти производную функции в заданной точке:

22. $f(x)=\frac{1-a^x}{1+(a_1)^x}$ в точке $x=0$;

23. $f(x)=\frac{x^a}{a^3}-\frac{x^2}{a_1}+ax$ в точке $x=0$;

24. $f(x)=(ax-b)\cdot \ln x$ в точке $x=a$;

25. $f(x)=sin^a(bx-b_1)$ в точке $x=0$;

26. $f(x)=\sqrt[a]{\frac{ax^{a_1}+bx-b_1}{x-b}}$ в точке $x=1$;

27. $f(x)=cos^{a_3}(ax-a_2)$ в точке $x=b$;

28. $f(x)=arctg\left(\frac{a}{a_1x+a_2}\right)$ в точке $x=1$.

Раздел IV. Исследование функций и построение их графиков.

Исследовать функции и построить графики:

1. $y=x^3-6x^2+9x-3$;
2. $y=-x^3+x$;
3. $y=x^4-5x^2+4$;
7. $y=\frac{6-x^3}{x^2}$;
8. $y=x-\sqrt{x}$;
9. $y=x^2\sqrt{x-3}$;

4. $y = \dfrac{1}{1-x^2}$;

5. $y = \dfrac{x^2-4}{x}$;

6. $y = \dfrac{(x+1)(x+8)}{x}$;

10. $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$;

11. $y = \sqrt[x]{3}$;

12. $y = (x-1)e^x$.

Раздел V. Интегральное исчисление

Значения коэффициентов для данных заданий смотреть в **приложении 5**:

$a, a_1, a_2, a_3, a_4, b, b_1, b_2, b_3, b_4$.

I. Неопределенный интеграл.

Вычислить:

1. $\int \left(\dfrac{x^a + ax - a_1}{x^2} \right) dx$;

2. $\int \dfrac{dx}{a_2 - ax}$;

3. $\int e^{ax} dx$;

4. $\int e^{ax} \cos x dx$;

5. $\int ax \ln x dx$;

6. $\int \dfrac{\left(x^b + ax\sqrt[b]{x^a} + a_1\sqrt{x^b} \right) dx}{a_2 x\sqrt{x}}$;

7. $\int \left(\dfrac{a_3}{\sqrt{a^2 - (a_1 x)^2}} + \dfrac{a}{e^x} \right) dx$;

8. $\int \left(a_2 \sin^2 x \cos x - \cos x \right) dx$;

9. $\int \dfrac{a_3 dx}{ax^2 + (a_2)^2}$;

10. $\int \dfrac{ax + a_1}{a_1 x^2 + a_2 x + b} dx$.

II. Определенный интеграл.

Вычислить:

1. $\int_a^b e^{ax} dx$;

5. $\int_0^{\pi} (x + b_3) \sin(b_4 x) dx$;

2. $\int_0^{\pi} sin(a_1 x)dx;$

3. $\int_0^{1} (a_2 x^2 + a_3 x + a_4)dx;$

4. $\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{b_1 x + b_2}} dx;$

6. $\int_1^{3} \frac{a\sqrt[3]{x^a} + a_1 x\sqrt{x} + a_2}{x^{a_1}\sqrt{x}} dx;$

7. $\int_0^{2} \frac{xdx}{\left(x^2 + a\right)^2};$

8. $\int_1^{e} \frac{\left(b_1 + \ln x\right)}{x} dx.$

Раздел VI. Метод наименьших квадратов

Значения y_i для данного задания смотреть в **приложении 6**:

Экспериментально получены пять значений функции $y = f(x)$ при пяти значениях аргумента, которые записаны в таблице:

x_i	1	2	3	4	5
y_i	$y_1 + n$	$y_2 + n$	$y_3 + n$	$y_4 + n$	$y_5 + n$

где n – номер группы.

Методом наименьших квадратов найти функцию вида $y=ax+b$, выражающую приближенную функцию $y=f(x)$. Сделать чертеж.

Раздел VII.Дифференциальные уравнения

Значения коэффициентов для **задания I** смотреть в **приложении 7**:

$a, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, b, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7;$

для **задания II** в **приложении 7.1**: $a, a_1, a_2, a_3, a_4, b, b_1, b_2, b_3, b_4;$

для **задания III** в **приложении 7.2**: $a, a_1, a_2, a_3, b, b_1, b_2, b_3;$

для **задания IV** в **приложении 7.3**: d, m, n.

I. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

1. $y' = y^a e^{a_1 x};$

2. $y' = x^{b} e^{b_1 y}$;

3. $y' = y^{a_2} \sin(b_2 x)$;

4. $y' = y^{a_3} \cos(b_3 x)$;

5. $axy' = a_4 y^{b_4}$;

6. $a_5 y' + \frac{b_5}{x} y = a_6 x^{b_6}$;

7. $a_7 y' + b_7 y = y^2 e^x$;

8. $y' = ay^4 \cos x + btgx$;

9. $a_1(1 - x^2)y' + b_1 xy = xy^2$;

10. $a_2 xy' + b_2 y - e^x = 0$.

II. Найти решение задачи Коши с заданным начальным условием:

1. $y' = y^a \cos(bx), y(\pi) = 1$;

2. $y' = \frac{a_1 y}{x} + x^{b_1}, y(1) = \frac{1}{a_2}$;

3. $y' = \frac{y}{x} + b_2 x \sin(b_3 x), y(\pi/2) = 0$;

4. $y' = \frac{y}{x} + a_3 x \cos(a_4 x), y(\pi/2) = 0$;

5. $b_4 y' y(1 + e^x) = e^x, y(0) = 1$.

III. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

1. $y'' + ay = 0$;

2. $y'' + by' = 0$;

3. $y'' + a_1 y' + b_1 y = 0;$
4. $y'' + a_2 y' + b_2 y = ae^{a_1 x};$
5. $a_1 y'' + y' + b_1 y = a \sin x;$
6. $y'' + a_2 y' + b_2 y = ax + e^{bx};$
7. $a_3 y'' + b_3 y' + y = a_1 x^2 + b_1 x;$
8. $y'' + ay' + by = x + a_1 e^x + \sin x.$

IV. Население некоторого города N в 2020 году составляло d млн. чел., а годовой прирост равнялся 10m тыс. чел. Найти ожидаемое число жителей города в 202n году, считая, что скорость прироста населения пропорциональна числу жителей в данный момент.

V. Дополнительные задания.

1. $x\sqrt{5+y^2}\,dx + y\sqrt{1+x^2}\,dy = 0;$
2. $y' + \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^2};$
3. $y' - \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x};$
4. $y(5 + \ln y) + xy' = 0;$
5. $y' - \frac{3}{x} y = x^3 e^x.$

Раздел VIII. Ряды

Значения коэффициентов для данных заданий смотреть в **приложении 8**:

$a, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, b, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, k$.

I. Проверить необходимое условие сходимости рядов:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{an+a_1}{bn+b_1}\right)$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_2 n^k}{b_2 n^{k+1}+b_3}\right)$.

II. Используя один из достаточных признаков, установить, сходятся ряды или расходятся:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a_3)^n}{(b_3)^n}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_2}{(b_2)^n}$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a_3)^n}{n!}$.

III. Исследовать ряды на условную и абсолютную сходимость:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}a_4 n}{b_4 n+a_3}$;

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(a_5 n+b_5)}{n!}$;

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}a_6}{(b_6)^n}$.

IV. Найти область сходимости степенных рядов:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+a_7)^n}{n!}$;

2. $\sum_{n=1}^{\infty}n!\,(x+b_7)^n$.

V. Вычислить значение $sin(a_8)$ и $cos(b_8)$ с точностью 0,0001.

VI. Разложить функцию $y = k\,sin(bx) + ax^{b+1}\cdot e^{ax}$ в ряд Тейлора и вычислить ее значение в точке x = 0,15 с точностью до 0,01.

Раздел IX. Элементы линейной алгебры

Значения коэффициентов для данных заданий смотреть в **приложении 9**:

$a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{21}, b_{22}, b_{23}, c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}$,

d_{11}, d_{12}, d_{13};

<u>в приложении 9.1</u>:

$k_{11}, k_{12}, k_{13}, k_{21}, k_{22}, k_{23}, k_{31}, k_{32}, k_{33}, l_{11}, l_{12}, l_{13}, l_{21}, l_{22}, l_{23}, l_{31}, l_{32}, l_{33}$

1. Матрицы.

1. Даны две матрицы:

A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ и **B** = $\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$. Найти **C** = d_{11}***A** - d_{12}***B**.

2. Даны две матрицы – строки:

B = $[b_{11} \quad b_{12} \quad b_{13}]$ и **D** = $[d_{11} \quad d_{12} \quad d_{13}]$. Транспонируйте матрицу **D** и найдите произведение **C** = **B*** $\mathbf{D}^{\mathrm{T}}$.

3. Даны матрица **К** = $\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}$ и матрица **D** = $[d_{11} \quad d_{12} \quad d_{13}]$.

Транспонируйте матрицу **D** и найдите произведение **A** = **K***$\mathbf{D}^{\mathrm{T}}$.

4. Даны две матрицы: **A** = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ и **B** = $\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$. Найдите произведение **AB** и **BA**. Перестановочны ли эти матрицы?

5. Матрица **A** из задачи 4 умножается на неизвестную матрицу – столбец **X**, состоящую из двух элементов x_1 и x_2. При этом имеет место матричное равенство **AX** = $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$, где **B** = $[b_{11} \quad b_{12}]$. Найти матрицу - столбец **X**.

6. Матрица **A** из задачи 4 умножается на неизвестную квадратную матрицу **X** второго порядка. При этом имеет место матричное равенство **AX** = **C**, где **C** = $\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$. Найти матрицу **X**.

7. Найти произведение матриц **К** = $\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}$ и **L** = $\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}$.

II. Системы линейных уравнений.

Значения коэффициентов для данных заданий смотреть в **приложении 9.2**:

$a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, b_{11}, b_{12}, b_{13}, c_{11}, c_{12}, c_{13}, d_{11}, d_{12}, d_{13}$ в **приложении 9.3**:

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$;

в **приложении 9.4**:

$k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, n_1, n_2, n_3, n_4, n_5$.

1. Основная матрица системы линейных уравнений имеет вид **A** = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. Найти определитель матрицы **A** и обратную матрицу $\mathbf{A}^{-1}$.

Найти решение системы линейных уравнений **AX = B**, (где **X** – неизвестный вектор, **B** – вектор свободных членов) в матричном виде для трех различных матриц – столбцов свободных членов **B**: $[b_{11} \quad b_{12} \quad b_{13}]^T, [c_{11} \quad c_{12} \quad c_{13}]^T$, $[d_{11} \quad d_{12} \quad d_{13}]^T$.

2. Решить систему методом Жордана – Гаусса:

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = a_5, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 = b_5, \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 = c_5, \\ d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3 + d_4x_4 = d_5. \end{cases}$$

3. Исследовать систему уравнений на совместность. Найти решение в случае совместности.

$$\begin{cases} k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + k_4x_4 = k_5, \\ l_1x_1 + l_2x_2 + l_3x_3 + l_4x_4 = l_5, \\ m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4 = m_5, \\ n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4x_4 = n_5. \end{cases}$$

Приложение 1. **Раздел I. Элементы теории множеств**

№	a_1	a_2	a_3	a_4	№	a_1	a_2	a_3	a_4	№	a_1	a_2	a_3	a_4
1.	3	8	1	15	**11.**	1	8	3	7	**21.**	4	6	3	7
2.	3	5	4	13	**12.**	5	5	4	8	**22.**	4	5	4	6
3.	6	2	5	2	**13.**	4	3	7	3	**23.**	5	6	7	4
4.	4	4	3	14	**14.**	1	3	4	3	**24.**	6	5	3	8
5.	8	5	7	15	**15.**	7	2	1	7	**25.**	3	4	5	6
6.	1	7	6	13	**16.**	2	9	7	10	**26.**	4	5	5	6
7.	2	3	8	2	**17.**	1	4	5	2	**27.**	5	6	2	3
8.	5	1	2	3	**18.**	4	9	3	3	**28.**	5	6	3	4
9.	7	6	1	15	**19.**	8	7	5	8	**29.**	6	7	4	5
10.	3	6	7	3	**20**	3	5	2	6	**30.**	5	6	7	3

Приложение 2. Раздел II. Пределы

№	a	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	b	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
1.	1	3	8	1	15	8	-6	5	2	-6	8	8	1
2.	2	3	5	4	13	4	7	6	-1	7	5	4	2
3.	5	6	2	5	2	-4	-7	13	-4	-7	2	-4	3
4.	3	4	4	3	14	-4	-9	9	-1	-9	4	-4	4
5.	7	8	5	7	15	-7	8	3	5	8	5	-7	5
6.	6	1	7	6	13	-5	-6	2	-4	-6	7	-5	6
7.	8	2	3	8	2	5	8	13	5	8	5	5	7
8.	4	5	1	2	3	-7	6	7	2	6	5	-7	8
9.	9	7	6	1	15	-6	8	14	-4	8	7	-6	9
10.	7	3	6	7	3	8	3	4	3	3	6	8	10
11.	3	1	8	3	7	3	6	15	3	6	8	3	11
12.	5	5	5	4	8	6	-10	14	-2	-10	5	6	12
13.	8	4	3	7	3	7	-8	15	-3	-8	5	7	1
14.	4	1	3	4	3	-5	-7	10	-9	-7	3	-5	2
15.	1	7	2	1	7	2	-9	5	2	-9	2	2	3

16.	2	2	9	7	10	2	-8	6	1	-8	9	2	4
17.	5	1	4	5	2	-3	4	12	-8	4	4	-3	5
18.	2	4	9	3	3	-4	-8	10	2	-10	9	-4	6
19.	7	8	7	5	7	-1	-8	5	-5	-8	7	-1	7
20	3	3	5	2	6	4	7	6	-4	8	5	4	8
21.	4	4	6	3	5	5	8	7	-3	4	6	5	9
22.	5	4	5	4	3	6	9	6	-2	6	5	7	10
23.	6	5	6	3	4	5	7	2	-4	5	3	5	11
24.	5	6	2	3	5	5	6	3	3	7	5	7	12
25.	3	3	4	5	6	7	7	3	4	5	6	5	16
26.	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	4	5	15
27.	4	5	6	2	3	5	7	8	6	7	5	6	14
28.	4	5	6	3	4	5	8	7	6	5	9	7	13
29.	8	6	7	4	5	6	5	4	4	5	6	7	12
30.	5	5	6	7	3	2	4	5	3	4	5	6	11

Приложение 3. Раздел III. Дифференциальное исчисление

№	a	a_1	a_2	a_3	b	b_1	№	a	a_1	a_2	a_3	b	b_1
1.	1	3	8	1	5	2	**16.**	2	2	9	7	6	1
2.	2	3	5	4	6	-1	**17.**	5	1	4	5	12	-8
3.	5	6	2	5	13	-4	**18.**	2	4	9	3	10	2
4.	3	4	4	3	9	-1	**19.**	7	8	7	5	5	-5
5.	7	8	5	7	3	5	**20**	3	3	5	2	6	-4
6.	6	1	7	6	2	-4	**21.**	4	4	6	3	7	-3
7.	8	2	3	8	13	5	**22.**	5	4	5	4	6	-2
8.	4	5	1	2	7	2	**23.**	6	5	6	3	2	-4
9.	9	7	6	1	14	-4	**24.**	5	6	2	3	3	3
10.	7	3	6	7	4	3	**25.**	3	3	4	5	3	4
11.	3	1	8	3	15	3	**26.**	4	4	5	5	7	8
12.	5	5	5	4	14	-2	**27.**	4	5	6	2	8	6
13.	8	4	3	7	15	-3	**28.**	4	5	6	3	7	6
14.	4	1	3	4	10	-9	**29.**	8	6	7	4	4	4
15.	1	7	2	1	5	2	**30.**	5	5	6	7	5	3

Приложение 5. Раздел V. Интегральное исчисление

№	a	a_1	a_2	a_3	a_4	b	b_1	b_2	b_3	b_4
1.	-0,4	2	2	-7	5	4	6	3	8	6
2.	-1,4	3	-4	2	-7	1	3	0	5	4
3.	-0,2	4	-4	-3	4	5	5	2	-8	6
4.	-0,6	5	1	2	-2	5	7	3	-5	2
5.	-0,5	6	1	-7	8	1	6	10	4	8
6.	-1,6	7	-1	5	3	2	7	4	3	3
7.	-1,4	8	3	-8	-9	2	3	7	1	3
8.	-1	9	-3	-4	-9	3	7	4	-2	5
9.	-0,7	6	-3	-2	-1	5	3	2	-5	3
10.	-1,5	7	-1	-3	7	4	3	7	-8	6
11.	-1,1	7	2	3	-1	4	2	3	6	7
12.	0,5	7	4	-3	-5	3	6	7	4	5
13.	1,2	7	1	5	-4	2	3	4	7	3
14.	-0,5	10	4	-5	4	2	7	8	5	6

15.	-0,2	8	-1	-5	7	4	3	2	1	3
16.	0,1	17	3	-5	-7	3	8	2	4	9
17.	1,2	18	-5	-9	1	1	4	4	10	2
18.	0,8	19	-1	10	-4	3	6	5	4	8
19.	-0,4	20	2	-7	-11	5	8	4	5	9
20.	-0,5	21	-1	-3	-4	4	4	5	9	2
21.	0,5	-2	6	5	4	2	3	4	7	6
22.	1	-3	5	7	7	5	5	6	3	7
23.	0,6	-4	5	6	3	4	7	8	5	4
24.	0,7	-5	6	3	7	3	7	4	5	8
25.	0,5	-6	5	4	8	2	1	7	6	4
26.	2	-7	6	6	4	1	6	7	4	5
27.	-0,8	-8	5	7	3	4	7	7	6	3
28.	-0,9	-9	6	5	3	4	5	8	3	5
29.	2	-10	3	6	5	3	3	3	2	6
30.	3	-11	3	2	2	5	2	8	4	7

<u>Приложение 6.</u> Раздел VI. Метод наименьших квадратов

№	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	№	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
1	0,9	1,5	0,7	0,3	0,1	**16.**	7,4	9,9	6,8	2,7	3,5
2	3,0	4,2	2,6	0,6	1,0	**17.**	1,3	1,8	1,1	0,2	0,5
3	5,1	6,9	4,5	1,5	2,1	**18.**	3,4	4,5	3,0	1,0	1,5
4	7,2	9,6	6,4	2,4	3,2	**19.**	5,7	7,3	4,8	1,7	2,5
5	1,0	1,6	0,8	0,2	0,0	**20.**	7,5	10,0	6,7	2,8	3,4
6	3,1	4,3	2,7	0,7	1,1	**21.**	1,4	2,0	1,3	0,4	0,4
7	5,2	7,0	4,6	1,6	2,2	**22.**	3,5	4,6	3,2	1,3	1,5
8	7,3	9,7	6,5	2,5	3,3	**23.**	5,7	7,4	5,0	1,0	2,5
9	1,1	1,7	0,9	0,1	0,1	**24.**	7,5	10,1	6,8	2,9	3,6
10	3,1	4,4	2,7	0,8	1,2	**25.**	1,5	2,2	1,3	0,4	0,5
11	5,3	7,2	4,8	1,7	2,3	**26.**	3,7	4,8	3,3	1,2	1,6
12	7,4	9,7	6,6	2,5	3,4	**27.**	5,8	7,5	5,2	2,1	2,7
13	1,2	1,9	1,0	0,1	0,4	**28.**	7,8	10,3	7,0	3,2	3,8
14	3,5	4,5	2,8	0,9	1,2	**29.**	1,7	2,2	1,5	0,4	0,6
15	5,5	7,1	4,7	1,8	2,4	**30.**	3,8	4,9	3,2	1,3	1,8

Приложение 7. Раздел VII. Дифференциальные уравнения

Задание I.

№	a	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	b	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
1.	-4	2	-4	2	-2	-3	2	5	5	2	2	2	2	-3	3	-7
2.	2	-2	3	3	10	-4	6	2	3	-2	-4	3	1	10	-3	8
3.	-3	3	-5	4	4	-5	4	9	-1	3	3	4	7	4	4	3
4.	1	-3	4	5	7	3	8	3	-3	-3	-5	5	3	8	-4	9
5.	-2	4	-6	6	3	4	3	8	6	4	4	6	8	3	5	4
6.	-1	-4	5	7	8	5	7	4	4	-4	-6	7	4	12	-5	6
7.	-1	5	-7	8	11	-2	6	7	-4	5	5	8	5	9	6	2
8.	-2	-5	6	-2	7	-1	5	5	-5	-5	-7	9	2	4	-6	8
9.	1	4	-8	-3	3	1	9	6	3	6	6	-2	8	14	7	4
10.	-3	-4	7	-4	9	2	3	3	-3	-6	-8	-3	-5	3	-7	-4
11.	2	6	-9	-5	4	1	7	9	-2	7	7	-4	-4	7	8	-2
12.	-4	-6	8	-6	5	-1	5	7	4	-7	-9	-5	-7	8	-8	-8
13.	3	5	-3	-7	8	-5	6	5	7	8	2	-6	-2	17	9	-5
14.	-5	-5	2	-8	2	-6	2	8	1	-8	-3	-7	-9	3	-9	-4

15.	4	3	-4	2	9	-7	9	4	3	9	3	-8	4	5	1	-11
16.	-6	-3	3	3	5	5	4	-4	2	-9	-4	-9	8	-18	-1	-5
17.	5	2	-5	4	10	6	6	-8	-5	1	4	2	3	-6	2	4
18.	-7	-2	4	5	1	7	7	6	-3	-1	-5	3	7	-4	-2	7
19.	6	5	-6	6	5	-3	9	-1	-2	2	5	4	5	-11	3	2
20.	-8	-5	5	7	8	-2	4	5	7	-2	-6	5	-6	-4	-3	9
21.	7	4	-7	-2	2	-4	7	-2	8	3	6	6	-3	-7	4	4
22.	-5	-4	6	-3	12	2	8	6	4	-3	-7	7	-2	-12	-4	1
23.	5	3	-8	-4	3	3	4	-8	6	4	7	8	-7	-2	5	8
24.	-6	-3	7	-5	8	4	5	3	3	-4	-8	9	-9	-7	-5	3
25.	6	2	-5	-6	9	-6	7	-7	5	5	8	-2	-3	-3	6	5
26.	-4	-2	6	-7	11	-7	8	5	-4	-5	-9	-3	5	-8	-6	-4
27.	4	5	-3	2	2	-8	3	-4	-3	6	9	-4	8	-12	7	-6
28.	-3	-5	4	3	8	6	9	9	-2	-6	1	-5	3	-4	-7	-2
29.	3	4	-5	4	4	7	4	-6	-1	7	-1	-6	9	-9	8	-7
30.	-2	-4	2	5	5	8	5	3	-5	-7	2	-7	2	-5	-8	-3

Приложение 7.1 **Задание II.**

№	a	a_1	a_2	a_3	a_4	b	b_1	b_2	b_3	b_4
1.	1	2	-1	5	6	-4	10	6	-4	2
2.	2	3	-3	6	7	-2	8	4	-5	3
3.	2	4	-5	2	3	-7	8	7	-2	4
4.	3	6	-2	8	7	-1	6	-4	5	3
5.	3	2	-2	3	4	-2	5	-5	2	5
6.	4	7	-3	2	5	-3	4	-3	7	4
7.	4	5	-1	-1	6	-1	2	-2	5	3
8.	5	6	-3	-2	3	1	7	3	3	2-1
9.	5	8	-2	-5	4	2	3	5	4	1
10.	6	-7	-4	-4	2	3	1	6	5	-2
11.	6	-5	-1	-3	5	-2	5	2	6	2
12.	5	-4	-5	-2	6	-4	4	1	2	3
13.	5	-3	-4	3	3	-5	2	-4	3	4
14.	4	-2	-1	4	2	1	3	-2	4	-4

Приложение 7.2 **Задание III.**

№	a	a_1	a_2	a_3	b	b_1	b_2	b_3
1.	1	5	-1	2	8	3	4	5
2.	2	3	-3	-1	-8	-2	3	2
3.	4	3	-5	2	9	3	-2	2
4.	6	2	-7	-2	8	3	4	-2
5.	5	1	2	1	2	1	2	1
6.	3	4	3	2	3	1	3	3
7.	2	2	1	3	1	2	1	4
8.	4	6	4	4	4	2	4	2
9.	1	3	5	5	2	3	-2	5
10.	2	-2	2	1	5	1	2	1
11.	3	-1	-2	2	6	4	-2	3
12.	-2	-2	-3	3	-1	2	1	2
13.	-3	-3	-1	-2	-2	3	-1	4
14.	-5	-1	2	-1	-3	-1	3	1

15.	4	2	-3	2	1	2	1	5	1	5	**15.**	-1	3	4	2	1	-2	2	-1
16.	3	3	-2	5	1	5	4	3	-3	6	**16.**	1	4	6	3	3	-3	1	-2
17.	3	4	4	6	2	4	3	4	-2	7	**17.**	2	2	2	4	4	-1	2	-3
18.	2	5	5	3	3	2	6	2	-5	2	**18.**	5	5	3	1	1	1	3	-1
19.	2	6	4	4	2	3	2	1	-1	1	**19.**	3	3	4	5	2	2	4	2
20.	1	5	3	2	1	2	3	2	1	-1	**20.**	2	4	1	-2	3	3	2	3
21.	1	3	-4	4	-5	-6	9	-2	7	2	**21.**	-8	1	-9	11	5	7	-3	4
22.	2	9	-5	8	-3	-2	8	-7	3	4	**22.**	-10	2	-11	-11	-5	2	4	-4
23.	3	5	-2	3	-8	-5	7	-6	9	6	**23.**	1	3	5	12	4	3	5	2
24.	4	8	-8	9	-2	-7	6	-3	5	8	**24.**	2	4	-5	-12	-4	3	4	-4
25.	5	4	-4	4	-4	-5	5	-8	8	10	**25.**	3	5	4	13	3	2	1	3
26.	6	6	-3	7	-8	-3	4	-1	4	3	**26.**	4	-1	-4	-13	-3	3	2	4
27.	7	9	-9	2	-2	-2	3	-9	6	5	**27.**	5	-2	3	14	2	4	5	7
28.	8	2	-6	8	-4	-6	2	-6	4	7	**28.**	6	-3	-3	-14	-2	6	3	5
29.	9	8	-1	5	-7	-3	1	3	8	1	**29.**	7	-4	2	15	1	3	7	3
30.	10	4	-8	6	-3	-2	-1	4	2	9	**30.**	8	-5	-2	-15	-1	2	4	1

Приложение 7.3 **Задание IV.**

№	*d*	*m*	*n*	№	*d*	*m*	*n*	№	*d*	*m*	*n*
1	1	2	3	**11**	4	3	4	**21**	7	4	5
2	1	3	4	**12**	4	4	5	**22**	8	2	3
3	1	4	5	**13**	5	2	3	**23**	8	3	4
4	2	2	3	**14**	5	3	4	**24**	8	4	5
5	2	3	4	**15**	5	4	5	**25**	9	2	3
6	2	4	5	**16**	6	2	3	**26**	9	3	4
7	3	2	3	**17**	6	3	4	**27**	9	4	5
8	3	3	4	**18**	6	4	5	**28**	10	2	3
9	3	4	5	**19**	7	2	3	**29**	10	3	4
10	4	2	3	**20**	7	3	4	**30**	10	4	5

Приложение 8 **Раздел VIII. Ряды**

№	a	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	b	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	k
1.	2	7	8	5	7	5	7	-7	0,2	9	-2	5	4	6	2	5	-7	0,1	1
2.	1	2	2	4	6	2	2	-2	0,1	5	-3	4	2	-5	2	1	-5	0,3	2
3.	2	3	3	2	3	3	4	-3	-0,2	3	-1	2	4	-3	4	2	-3	0.5	3
4.	3	-2	4	2	4	1	3	-1	-0,3	4	-3	6	5	-2	3	5	-2	-0,2	1
5.	4	3	1	3	2	4	1	1	0,3	6	2	4	3	4	1	3	2	-0,3	2
6.	2	5	5	1	5	2	5	2	-0,1	2	4	3	1	5	5	4	4	0,2	3
7.	3	1	2	4	3	3	2	-3	-0,4	4	3	5	1	2	3	2	6	0,3	4
8.	4	-2	3	2	4	5	3	-4	-0,3	5	-1	1	4	1	4	5	5	0,1	2
9.	1	1	4	5	1	1	1	2	-0,2	6	-3	1	3	-3	4	5	3	-0,1	3
10.	2	5	1	1	2	3	2	4	0,1	3	4	2	2	-1	5	4	-4	-0,2	1
11.	6	3	2	3	3	2	3	5	-0,4	1	2	3	2	-4	5	3	-2	-0,4	4
12.	3	4	3	2	5	4	4	-2	0,3	5	3	4	5	-5	3	2	-3	0,5	3
13.	2	-2	5	4	2	5	2	-3	0,2	3	-3	2	5	2	2	2	4	-0,5	2
14.	4	-3	2	5	3	6	4	-5	-0,1	4	-4	2	4	4	4	2	2	0,4	1

15.	1	-1	6	2	4	1	3	-1	-0,3	2	-1	4	3	3	3	3	3	-0,4	4
16.	3	2	3	1	1	7	1	-2	-0,1	6	5	3	2	5	1	2	1	0,3	5
17.	2	3	4	4	5	2	2	2	0,3	4	1	5	4	-2	1	1	-1	-0,3	3
18.	1	-2	2	2	2	4	2	3	0,2	5	3	2	5	-4	4	4	-2	-0,2	2
19.	4	-3	1	3	2	3	3	1	0,5	3	4	2	5	5	3	2	-3	-0,1	4
20.	5	-1	5	5	3	1	4	4	0,6	2	-5	5	3	-1	5	3	2	0,3	3
21.	6	3	1	3	4	5	1	-5	-0,5	4	2	5	2	-3	5	5	3	0,4	1
22.	3	4	1	2	1	6	2	-2	-0,6	3	-3	3	4	-2	6	2	4	-0,2	5
23.	4	2	5	1	5	3	3	-3	0,4	1	3	4	4	4	3	4	1	-0,5	3
24.	5	1	5	4	2	2	1	3	-0,2	5	-4	2	3	5	5	3	4	-0,1	2
25.	2	-2	2	3	3	5	2	2	0,1	4	4	1	2	3	4	1	3	0,2	4
26.	1	-1	3	2	1	3	3	4	0,5	3	-3	5	4	2	3	2	5	0,1	3
27.	4	-3	4	5	4	4	1	-2	0,6	2	4	3	4	-4	2	3	2	0,3	1
28.	3	4	1	1	1	1	2	-3	-0,4	5	2	2	3	-3	3	3	-3	-0,4	1
29.	2	2	2	2	2	2	3	-1	0,3	3	3	4	2	-1	4	4	-4	0,2	4
30.	1	-1	3	1	3	4	5	-5	0,6	4	-5	5	3	-2	6	2	-3	-0,4	5

Приложение 9. Раздел IX. Элементы линейной алгебры

I. Матрицы.

№	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{21}	b_{22}	b_{23}	c_{11}	c_{12}	c_{21}	c_{22}	d_{11}	d_{12}	d_{13}
1.	4	6	5	6	-3	4	2	4	-5	-7	-3	-6	13	-1	-16	-4	1	-3	-8
2.	-3	-1	-1	-3	3	-2	5	-3	5	-6	1	1	34	-19	-4	-27	2	1	2
3.	-4	4	4	3	-3	4	2	-4	5	-5	3	-5	-34	25	-20	17	3	-3	-8
4.	2	-4	-6	2	2	1	-6	-2	3	5	1	3	-8	-14	-4	38	4	5	4
5.	-2	6	-1	-3	3	5	2	2	5	2	-7	-6	-19	-20	-5	-4	5	-6	3
6.	-5	-1	4	-2	-5	-4	-4	4	4	-3	-1	5	-15	9	-37	30	6	3	-9
7.	1	1	-2	2	-6	-7	4	-4	1	2	3	2	27	8	-40	-15	7	-9	6
8.	1	6	-5	3	2	-1	2	-6	-5	-5	-6	4	-39	4	33	32	8	5	-5
9.	-6	-3	-1	-3	-5	5	-6	6	2	5	-7	4	6	-5	12	-22	9	-8	-1
10.	-6	6	-5	5	-5	2	-4	1	1	-1	1	1	4	-10	-1	-20	10	6	4
11.	4	5	-5	-6	-6	6	3	1	5	5	-1	-6	10	-12	-24	12	11	6	-6
12.	-4	-5	-2	-5	-2	-3	1	-5	6	5	-2	4	2	7	-16	16	12	1	2
13.	-5	-6	-6	4	6	-1	4	-1	1	-4	2	2	-19	0	-8	-13	13	-3	-2
14.	-2	1	-2	-3	-4	-1	-2	-6	-3	5	-2	6	30	-33	29	-20	14	6	2

15.	3	6	-4	-4	3	2	3	-2	1	1	2	-2	21	42	20	32	15	5	-8
16.	-1	1	3	-2	1	3	1	-7	-6	-4	4	2	22	16	21	0	16	3	3
17.	-6	2	4	6	-4	-3	6	-6	-4	-1	-3	-3	-4	0	25	-21	17	-7	6
18.	-4	1	4	2	-1	4	-2	3	-5	-7	3	-4	0	0	-10	-10	18	-6	4
19.	-7	-1	-2	5	5	-5	5	-4	2	-6	2	-2	-10	5	-5	0	19	4	-2
20.	-3	4	-1	-4	5	4	1	1	-2	-4	-3	5	-13	-4	-18	2	20	-8	-2
21.	-6	2	4	6	-4	-3	6	-6	-4	-1	-3	-3	-4	0	25	-21	17	-7	6
22.	-4	4	4	3	-3	4	2	-4	5	-5	3	-5	-34	25	-20	17	3	-3	-8
23.	-5	-1	4	-2	-5	-4	-4	4	4	-3	-1	5	-15	9	-37	30	6	3	-9
24.	1	6	-5	3	2	-1	2	-6	-5	-5	-6	4	-39	4	33	32	8	5	-5
25.	4	6	5	6	-3	4	2	4	-5	-7	-3	-6	13	-1	16	-4	1	-3	-8
26.	-4	-5	-2	-5	-2	-3	1	-5	6	5	-2	4	2	7	-16	16	12	1	2
27.	-2	1	-2	-3	-4	-1	-2	-6	-3	5	-2	6	30	-33	29	-20	14	6	2
28.	-3	4	-1	-4	5	4	1	1	-2	-4	-3	5	-13	-4	-18	2	20	-8	-2
29.	4	6	5	6	-3	4	2	4	-5	-7	-3	-6	13	-1	16	-4	1	-3	-8
30.	-6	6	-5	5	-5	2	-4	1	1	-1	1	1	4	-10	-1	-20	10	-6	4

Приложение 9.1 **Раздел IX. Элементы линейной алгебры**

№	k_{11}	k_{12}	k_{13}	k_{21}	k_{22}	k_{23}	k_{31}	k_{32}	k_{33}	l_{11}	l_{12}	l_{13}	l_{21}	l_{22}	l_{23}	l_{31}	l_{32}	l_{33}
1.	4	6	5	4	-2	5	5	5	2	2	4	-5	-7	-3	-6	1	-6	-7
2.	-3	-1	-1	5	-7	6	-8	6	-7	5	-3	5	-6	1	1	5	-7	-5
3.	-4	4	4	3	3	-2	1	6	-3	2	-4	5	-5	3	-5	-4	-1	3
4.	2	-4	-6	-9	4	4	-1	-1	-2	-6	-2	3	5	1	3	-5	1	-5
5.	-2	6	-1	4	-9	5	-2	-7	6	2	2	5	2	-7	-6	-4	2	-4
6.	-5	-1	4	5	2	4	-2	-5	1	-4	4	4	-3	-1	5	4	6	-4
7,	1	1	-2	-4	3	-1	-6	-6	2	4	-4	1	2	3	2	-4	1	-5
8.	1	6	-5	-2	-9	6	-3	1	-2	2	-6	-5	-5	-6	4	6	-3	6
9.	-6	-3	-1	7	-1	-5	-5	4	-6	-6	6	2	5	-7	4	-4	-1	-1
10.	-3	2	2	3	2	-3	5	-4	3	3	5	2	6	-6	-4	-2	1	3
11.	2	4	-4	5	5	4	6	-3	5	-4	-3	-2	4	3	1	-1	2	4
12.	-2	3	-3	4	3	2	7	2	2	-2	5	6	2	4	-1	-4	-3	2
13.	3	1	2	2	6	3	3	4	-4	3	2	4	-1	-2	-5	3	-1	2
414.	4	-3	-1	-6	1	-4	5	5	-3	5	3	-2	-3	1	2	-2	1	3

15.	-3	-1	2	5	-3	-2	-3	-5	-5	1	-3	-2	1	-2	3	1	3	-4
16.	-4	2	4	-5	2	-1	-4	-3	2	-3	-2	4	-2	3	1	-2	3	1
17.	-2	3	3	3	-4	3	-2	-2	3	-2	1	4	-2	-3	4	2	5	-1
18.	2	4	-2	-4	-2	5	3	3	5	-5	-2	-4	-1	2	1	4	1	1
19.	4	-3	-3	2	-1	2	-4	5	1	3	-2	-3	-1	2	3	1	5	-2
20.	3	4	-1	6	4	1	-1	1	3	4	2	4	-1	-3	-2	3	2	1
21.	1	-5	2	2	2	1	-2	4	3	1	-1	-2	3	1	-4	-2	1	-1
22.	-2	2	3	4	-5	-5	4	-1	4	4	-3	1	4	2	-3	-5	2	1
23.	-1	-2	6	5	-2	-4	5	-4	1	5	1	2	-3	2	-1	2	5	4
24.	-3	3	-3	3	6	3	-3	2	1	2	1	-2	4	1	5	-2	-3	-1
25.	3	2	5	-4	3	5	-2	-3	-5	-4	-2	-1	-3	1	3	3	2	-1
26.	4	4	-3	3	1	-2	3	5	-3	-2	3	-2	-3	-2	-1	3	-2	4
27.	-5	1	6	-2	-1	2	4	-4	-2	-5	4	1	1	3	2	2	1	-4
28.	3	3	4	-5	-2	-3	2	-5	-2	3	2	-3	4	1	-1	-2	2	3
29.	4	-1	5	3	-1	3	-5	3	2	4	1	4	-2	-2	2	-3	1	4
30.	-1	2	3	-5	-3	-5	5	1	-3	1	-4	-6	-4	4	2	5	-1	1

Приложение 9.2 **Раздел IX. Элементы линейной алгебры**

№	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_{11}	b_{12}	b_{13}	c_{11}	c_{12}	c_{13}	d_{11}	d_{12}	d_{13}
1.	-3	-1	-4	-3	-6	-5	3	0	1	-4	-20	-2	-1	-18	6	23	40	-14
2.	-3	-5	4	-3	-2	2	-3	0	2	-20	-14	-6	21	2	-8	3	-2	-4
3.	-2	-5	-6	4	-4	-1	-4	0	3	41	40	-28	6	-8	32	13	14	-14
4.	-2	1	-2	1	2	-3	-5	0	4	2	9	-30	16	3	9	2	6	-17
5.	4	-5	5	3	3	-2	-1	0	5	13	0	-17	-23	-2	-23	-35	-8	-5
6.	-1	-3	2	4	-4	-4	-2	0	6	-11	-8	-20	4	44	-32	-9	-8	-12
7.	-4	4	2	-5	-4	-1	5	0	7	18	30	-4	2	38	-60	-24	-7	-13
8.	-2	2	-1	-4	5	2	4	0	8	4	-12	-48	0	-11	-24	2	19	16
9.	-3	1	4	2	-6	-4	-2	0	9	25	-42	33	-5	26	19	-20	4	-47
10.	-2	-2	-3	-2	2	-2	3	1	0	-8	-24	4	23	2	-20	4	-4	-18
11.	-2	-4	-5	-2	-6	2	-2	1	1	-15	8	-2	-30	-10	14	-11	8	12
12.	-6	-1	4	-3	-4	-4	1	1	2	-40	24	-10	-21	-3	-2	-30	1	-5
13.	-1	-3	3	5	-5	4	-1	1	3	19	22	7	8	21	-8	1	-9	17
14.	-5	-2	-5	-4	-3	2	3	1	4	34	24	-21	-3	-13	0	10	-9	-9
15.	1	3	5	2	-3	-6	3	1	5	-1	-5	7	15	-20	9	8	5	10

16.	-5	-6	-1	-1	-5	-4	-4	1	6	-43	-39	16	57	38	3	7	9	-10
17.	1	3	-4	-4	-6	-3	-3	1	7	26	-16	-38	27	-7	-46	23	-10	-39
18.	-4	-5	-5	1	2	-3	3	1	8	46	6	-42	-4	-14	24	-21	-6	23
19.	3	2	-3	3	-5	3	-6	1	9	11	-26	-32	9	6	6	-7	-2	-26
20.	-1	-3	2	-3	-3	-4	-2	2	0	10	26	-4	15	1	-10	15	3	2
21.	4	-5	5	3	3	-2	-1	0	5	13	0	-17	-23	-2	-23	-35	-8	-5
22.	-1	-3	2	4	-4	-4	-2	0	6	-11	-8	-20	4	44	-32	-9	-8	-12
23.	-2	2	-1	-4	5	2	4	0	8	4	-12	-48	0	-11	-24	2	19	16
24.	-3	1	4	2	-6	-4	-2	0	9	25	-42	33	-5	26	19	-20	4	-47
25.	-3	-1	-4	-3	-6	-5	3	0	1	-4	-20	-2	-1	-18	6	23	40	-14
26.	-3	-5	4	-3	-2	2	-3	0	2	-20	-14	-6	21	2	-8	3	-2	-4
27.	-5	-2	-5	-4	-3	2	3	1	4	34	24	-21	-3	-13	0	10	-9	-9
28.	1	3	5	2	-3	-6	3	1	5	-1	-5	7	15	-20	9	8	5	10
29.	-6	-1	4	-3	-4	-4	1	1	2	-40	24	-10	-21	-3	-2	-30	1	-5
30.	-1	-3	3	5	-5	4	-1	1	3	19	22	7	8	21	-8	1	-9	17

Приложение 9.3 **Раздел IX. Элементы линейной алгебры**

№	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5
1.	5	4	7	-4	17	-6	4	5	2	19	-5	4	-7	5	-4	3	-2	-8	-7	3
2.	-5	4	4	5	55	-5	6	2	-8	14	3	-5	5	2	-1	-2	4	-4	5	19
3.	-7	4	6	6	44	2	-7	-4	4	-52	3	5	-5	-4	6	2	-6	3	-2	-22
4.	2	-5	4	5	11	3	-7	-4	-8	20	5	3	6	4	-30	3	2	-7	-5	-22
5.	7	4	-7	-3	40	6	-6	-6	4	-8	-2	6	-7	-3	24	-6	7	-2	6	-33
6.	-3	4	-3	2	-28	2	-4	-7	5	-36	2	6	-3	3	-62	-4	6	7	2	6
7.	-5	7	-5	3	5	-4	-5	-8	-4	63	-3	2	-2	-3	22	-5	-3	4	7	5
8.	4	-3	2	3	10	5	2	-3	-5	-30	-4	4	-7	-4	-29	4	-5	7	-7	21
9.	-7	-4	2	4	12	-5	2	-4	-6	42	6	-3	-6	7	-29	-2	-3	-2	-6	21
10.	4	-6	-7	4	54	6	-7	-7	4	62	-2	2	-3	3	0	3	-3	5	4	16
11.	-3	3	5	4	27	6	-2	6	7	35	-4	5	-2	6	11	5	-6	3	-4	-2
12.	2	7	-2	2	5	-5	7	3	4	0	-7	2	2	6	20	3	5	-5	-2	8
13.	-3	3	-6	5	-11	5	-4	4	-2	-21	-2	-3	5	5	-7	7	-3	-4	6	-83
14.	5	-6	-8	-5	26	-5	4	-5	-2	-45	5	5	-7	6	5	-6	-3	-7	-4	-27
15.	-6	-4	-2	6	6	-2	-4	5	-2	-6	4	-3	-8	2	50	-2	3	-5	-2	6

16.	-3	-8	-5	-4	-10	-2	2	6	-6	-12	-4	-7	4	-6	-32	2	-2	-8	-7	-8
17.	-8	7	4	6	-45	-2	-3	5	4	-23	4	7	-7	6	-25	-5	-3	4	3	-9
18.	6	4	6	-6	-58	-4	3	7	-7	-28	-7	-4	4	6	31	-6	-5	5	-6	17
19.	7	-8	-8	4	88	5	-6	-4	5	45	4	-2	3	7	-24	5	-7	-2	4	45
20.	-4	2	-3	-8	28	4	6	-6	4	-30	3	-3	2	2	7	-3	-2	-5	6	-16
21.	5	4	7	-4	17	-6	4	5	2	19	-5	4	-7	5	-4	3	-2	-8	-7	3
22.	-5	4	4	5	55	-5	6	2	-8	14	3	-5	5	2	-1	-2	4	-4	5	19
23.	4	-3	2	3	10	5	2	-3	-5	-30	-4	4	-7	-4	-29	4	-5	7	-7	21
24.	-7	-4	2	4	12	-5	2	-4	-6	42	6	-3	-6	7	-29	-2	-3	-2	-6	21
25.	5	-6	-8	-5	26	-5	4	-5	-2	-45	5	5	-7	6	5	-6	-3	-7	-4	-27
26.	-6	-4	-2	6	6	-2	-4	5	-2	-6	4	-3	-8	2	50	-2	3	-5	-2	6
27.	2	-5	4	5	11	3	-7	-4	-8	20	5	3	6	4	-30	3	2	-7	-5	-22
28.	7	4	-7	-3	40	6	-6	-6	4	-8	-2	6	-7	-3	24	-6	7	-2	6	-33
29.	2	7	-2	2	5	-5	7	3	4	0	-7	2	2	6	20	3	5	-5	-2	8
30.	-3	3	-6	5	-11	5	-4	4	-2	-21	-2	-3	5	5	-7	7	-3	-4	6	-83

Приложение 9.4 **Раздел IX. Элементы линейной алгебры**

№	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
1.	-4	-4	12	4	0	-5	-2	12	8	-3	7	-2	-12	-16	9	14	-4	-24	-32	19
2.	-3	3	0	3	-3	3	-2	-2	-1	4	-12	11	2	10	-13	-24	21	6	18	-26
3.	-4	2	-4	-2	28	-3	3	-5	-4	30	3	-2	4	3	-25	-8	6	-10	-6	66
4.	3	-2	-1	1	1	-5	-3	-11	-8	-8	-7	-8	-23	-15	-15	6	-4	-2	2	3
5.	-4	4	-2	-2	0	-4	-5	-4	1	31	3	-4	3	7	0	6	10	10	8	-62
6.	-5	3	-1	-13	1	4	3	17	5	-17	-11	12	14	-34	-14	-25	15	-5	-65	5
7.	2	-4	-3	-13	-9	-2	-2	-3	-11	-3	3	3	2	14	2	2	-10	-4	-32	-15
8.	2	4	2	10	-2	-2	3	2	1	1	-3	2	-3	-7	11	3	5	7	18	-11
9.	-3	-4	4	2	-19	2	-3	-2	-5	0	4	3	3	20	4	-18	-8	6	-26	-45
10.	-4	3	-15	10	11	2	-5	11	-12	-9	-20	29	-89	78	69	10	-18	48	-46	-38
11.	-5	2	14	7	-9	2	-5	-14	-7	12	-18	24	84	42	-66	15	-27	-84	-42	70
12.	-3	3	0	-9	6	4	4	-8	4	0	-15	-9	24	-21	6	13	19	-32	7	6
13.	4	2	-2	0	8	2	2	0	2	6	6	2	-4	-2	10	14	2	-12	-10	18
14.	2	3	3	-2	-22	4	-2	-5	-1	13	2	-3	-2	-3	11	-10	13	17	6	-70
15.	2	-2	0	0	6	-4	3	-2	-2	-11	18	-15	6	6	51	-18	14	-8	-8	-49

16.	-2	3	-2	-11	2	-4	3	3	-12	-11	-4	2	2	-12	-6	-14	10	5	-47	-20
17.	-4	4	-3	-9	19	-4	-3	3	2	6	-5	-4	-3	-18	14	13	17	-9	3	-13
18.	2	-3	-2	-8	15	-5	-5	-2	-19	14	-2	-3	-2	-12	11	18	10	4	46	-20
19.	-4	-3	5	1	11	-4	3	11	7	5	-20	3	43	23	37	28	-3	-59	-31	-53
20.	2	3	-3	2	-15	-4	3	3	-16	15	-2	-4	-5	16	0	-2	17	13	-62	15
21.	-3	3	0	3	-3	3	-2	-2	-1	4	-12	11	2	10	-13	-24	21	6	18	-26
22.	-4	2	-4	-2	28	-3	3	-5	-4	30	3	-2	4	3	-25	-8	6	-10	-6	66
23.	2	-4	-3	-13	-9	-2	-2	-3	-11	-3	3	3	2	14	2	2	-10	-4	-32	-15
24.	2	4	2	10	-2	-2	3	2	1	1	-3	2	-3	-7	11	3	5	7	18	-11
25.	2	3	3	-2	-22	4	-2	-5	-1	13	2	-3	-2	-3	11	-10	13	17	6	-70
26.	2	-2	0	0	6	-4	3	-2	-2	-11	18	-15	6	6	51	-18	14	-8	-8	-49
27.	-5	2	14	7	-9	2	-5	-14	-7	12	-18	24	84	42	-66	15	-27	-84	-42	70
28.	-3	3	0	-9	6	4	4	-8	4	0	-15	-9	24	-21	6	13	19	-32	7	6
29.	2	-4	-3	-13	-9	-2	-2	-3	-11	-3	3	3	2	14	2	2	-10	-4	-32	-15
30.	2	4	2	10	-2	-2	3	2	1	1	-3	2	-3	-7	11	3	5	7	18	-11

Учебное издание

Алтухова И. А., Жидкова М.И.

Практикум по математике (часть 1)

Подписано в печать « ___ » _____ 2024.
Формат 60 × 84 1/16. Бумага А-4.
Усл. печ. л. _____. Уч.-изд. л. _____.
Тираж 100. Заказ _____.

Редакционно-издательский отдел Дальневосточного института управления – филиалаРАНХиГС. 680000, Хабаровск, ул. Муравьёва-Амурского, 33.